

6. Übungsblatt (erschienen am 26.05.2020)

Aufgabe 6.1 (Votieraufgabe)

Bestimmen Sie die maximale Konsistenzordnung der Verfahren aus Abschnitt 1.3.4.

Aufgabe 6.2 (Votieraufgabe)

Zeigen Sie, dass die implizite Mittelpunktsregel das einzige 1-stufige Runge-Kutta-Verfahren mit Konsistenzordnung 2 ist.

Aufgabe 6.3 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

(a) Betrachten Sie das AWP

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad y_0 \in \mathbb{C}^d, \quad f \in GV. \quad (1)$$

Zeigen Sie, dass Runge-Kutta-Verfahren invariant unter Koordinatentransformationen sind. D.h., ist $T \in \mathbb{C}^{d \times d}$ eine reguläre Transformationsmatrix, y_1 die erste Iterierte eines RKVs angewandt auf das AWP (1) und \hat{y}_1 jene desselben RKVs angewandt auf das transformierte AWP

$$\hat{y}'(x) = \hat{f}(x, \hat{y}(x)), \quad \hat{y}(x_0) = \hat{y}_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad \hat{y}_0 \in \mathbb{C}^d,$$

mit $\hat{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$, $\hat{f} : (x, y) \mapsto Tf(x, T^{-1}y)$ und $\hat{y}_0 := Ty_0$, dann gilt:

$$y_1 = T^{-1}\hat{y}_1$$

für h_0 klein genug.

(b) Gegeben sei das AWP

$$y'(x) = Ay + \varphi(x), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^d, \quad (2)$$

mit symmetrischer Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, sowie $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ unendlich oft stetig differenzierbar. Seien (λ_k, v_k) , $k = 1, \dots, d$ die Eigenpaare von A . Zeigen Sie, dass $y^{(1)} = \sum_{k=1}^d \xi_k^{(1)} v_k$, wobei $y^{(1)}, \xi_k^{(1)}, k = 1, \dots, d$ die jeweils ersten Iterierten eines RKVs angewandt auf (2) und

$$\xi'(x) = \lambda_k \xi(x) + (\varphi(x), v_k), \quad \xi(0) = (y_0, v_k), \quad k = 1, \dots, d$$

sind.

Aufgabe 6.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

(a) Schreiben Sie analog zu Teil (a) von Aufgabe 4.5 eine MATLAB-Funktion

```
function [ti,yi] = impl_Runge_Kutta_Verfahren(t0,y0,h,f,fy,T,A,b,c),
```

für implizite Runge-Kutta-Verfahren, d.h. A ist keine linke untere Dreiecksmatrix. Verwenden Sie dazu das Newton-Verfahren¹ aus Aufgabe 5.1 (b), mit Abbruchkriterium $\|F(x_k)\| \leq 10^{-8}$. Zusätzlich zu dem Parameter \mathbf{f} (wie beim expl. Verfahren) soll mit dem Parameter \mathbf{fy} die Ableitung $f_y(x, y)$ übergeben werden, welche für das Newton-Verfahren benötigt wird.

(b) Erstellen Sie mithilfe Ihrer MATLAB-Funktion für alle impliziten RKVs aus Abschnitt 1.3.4 Fehlerplots, wie in Teil (b) von Aufgabe 4.4 beschrieben.

¹Es bietet sich hier an den MATLAB\{-Operator und die MATLAB-Funktion **kron** zu verwenden.