Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dr. Sarah Eberle
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

---

5. Übungsblatt (erschienen am 19.05.2020)

Aufgabe 5.1 (Votieraufgabe)

(a) Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\eta_j = y_i + h_i \sum_{l=1}^{s} a_{jl} f(x_i + c_l h_i, \eta_l), \quad j = 1, \ldots, s,$$

aus der ersten Formulierung eines allgemeinen RKVs für ein skalares AWP, d.h. $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f\colon (x, y) \mapsto f(x, y)$ ist eine skalare Funktion.

Entwickeln Sie für dieses Gleichungssystem eine möglichst vereinfachte Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens zur Berechnung des Vektors

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_s)^T \in \mathbb{R}^s,$$

wobei $\eta^{(0)} = (y_i, y_i, \ldots, y_i)^T \in \mathbb{R}^s$ der Startvektor dieser Iteration sei.

(b) Lösen Sie Teil (a) für ein allgemeines (nicht notwendigerweise skalares) AWP, d.h. $y'(x) = f(x, y(x))$ mit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ für $d \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 5.2 (Votieraufgabe)

Zeigen Sie dass es sich bei den Verfahren aus Abschnitt 1.3.4 um Runge-Kutta Verfahren (RKV) handelt und bestimmen Sie die dazugehörigen Butcher-Tableaus.

Aufgabe 5.3 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Betrachten Sie das lineare inhomogene AWP

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d,\ y'(x) = Ay(x) + b,\ y(0) = y_0, \tag{1}$$

wobei $b \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ diagonalisierbar sei, d.h. es existiert eine reguläre Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{d\times d}$ und eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{C}^{d\times d}$, so dass $A = TDT^{-1}$ ist. Bestimmen Sie $v \in \mathbb{C}^d$ und $z_0 \in \mathbb{C}^d$, so dass für die Lösung z des AWP

$$z' = Dz, \quad z(0) = z_0$$

gilt, dass $y(x) = Tz(x) + v$ das AWP (1) löst.

Aufgabe 5.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Bei der Implementierung eines Einschrittverfahrens ist es sinnvoll die Schrittweite pro Schritt gerade so klein zu wählen, dass eine gewünschte Genauigkeit noch eingehalten wird. Effizient lässt sich dies für geeignete RKVs mithilfe eines eingebetteten Kontrollverfahrens realisieren.
Vorgehensweise: Zu einem gegebenen AWP werden die Näherungen y_{i+1} bzw. $\hat{y}_{i+1}$ an die Lösung y mit einem s-stufigen RKV (geg. durch $A, b1, c$) mit Konsistenzordnung p bzw. mit einem s-stufigen RKV (geg. durch $A, b2, c$) mit Konsistenzordnung $\hat{p} = p + 1$ berechnet. Da beide Verfahren mit dem gleichen A und c arbeiten, können sie weitestgehend simultan berechnet werden, sodass der Rechenaufwand nicht sonderlich erhöht wird. Man spricht dann von eingebetteten RKVs, die sich mit dem erweiterten Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b1^T \\ \hline & b2^T \end{array}$$

beschreiben lassen. Nach einem Schritt[1]

$$y_{i+1} = \hat{y}_i + h_i \sum_{j=1}^{s} b1_j f(x_i + c_j h_i, \eta_j), \quad \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h_i \sum_{j=1}^{s} b2_j f(x_i + c_j h_i, \eta_j)$$

wird mithilfe des Kotrollverfahrens der Fehlerschätzer $\delta_{i+1} = \|y_{i+1} - \hat{y}_{i+1}\|$ berechnet. Abhängig von einer (selbst vorgegebenen) Fehlertoleranz $\texttt{tol} > 0$ und einem Parameter τ (der etwas kleiner als 1 gewählt werden sollte) wird die Schrittweitengröße[2]

$$h = \tau \left(\frac{\texttt{tol}}{\delta_{i+1}} \right)^{1/(p+1)} h_i$$

angepasst. Gilt nun $\delta_{i+1} < \texttt{tol}$, dann wird mit $h_{i+1} = h$ der nächste Schritt begonnen, andernfalls wird der letzte Schritt mit der verkleinerten Schrittweite $h_i = h$ wiederholt.

(a) Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

```
[xi,hat_yi] = RKV_expl_embedded(A,b1,b2,c,f,y0,x0,T,h0,tol,tau,p),
```

die nach obigen Schema (adaptive Schrittweitensteuerung mit $h_0 = \text{h0}, \text{tau} = \tau$) für ein explizites eingebettetes RKV den diskreten Näherungsgraphen [`xi`,`hat_yi`] an den Lösungsgraphen des AWPs $y'(x) = f(x, y(x)),\ y(\text{x0}) = \text{y0} \in \mathbb{R}^d$ auf [x0,T] berechnet.

(b) Testen Sie ihr Programm anhand des AWPs

$$\dot{y}_1(x) = 1 + y_1(x)^2 y_2(x) - 4y_1(x),\ \dot{y}_2(x) = 3y_1(x) - y_1(x)^2 y_2(x), \quad y_1(0) = 1.01,\ y_2(0) = 3$$

auf dem Intervall $[0, 20]$ mit dem eingebetteten RKV

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b1^T \\ \hline & b2^T \end{array} := \begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 0 & 1/6 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 & 0 \end{array}$$

und $\texttt{h0} = 1$, $\texttt{tol} = 10^{-5}$, $\tau = 0.9$ sowie $p = 3$ seien. Plotten Sie

(i) die Näherungsgraphen zu [`xi`, `hat_yi(1,:)`] und [`xi`, `hat_yi(2,:)`],

(ii) die Schrittweiten `hi` gegen `xi` mit `hi = xi(2 : end) - xi(1 : end - 1)`.

[1] Bei der Berechnung von y_{i+1} "startet" man bewusst bei $\hat{y}_i$.
[2] Überlegen Sie sich, warum diese Formel Sinn macht und wie man den Fall $\delta_{i+1} = 0$ einfach abfangen kann.