Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dr. Sarah Eberle
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

---

4. Übungsblatt (erschienen am 12.05.2020)

Aufgabe 4.1 (Votieraufgabe)
Seien $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, sowie $\eta \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{R}^d$. Angenommen, $f(\xi) = \eta$ und $g^{(k)}(\eta) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass dann $\partial^\alpha (g \circ f)(\xi) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.

Aufgabe 4.2 (Votieraufgabe)
Betrachten Sie das nicht autonome d-dimensionale AWP

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(a) = y_0 \in \mathbb{R}^d \tag{1}$$

und das dazugehörige autonome (d+1)-dimensionale AWP

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} Y_1'(x) \\ Y_2'(x) \end{pmatrix} = F(Y(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(Y_1(x), Y_2(x)) \end{pmatrix}, \quad Y(a) = \begin{pmatrix} a \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}, \tag{2}$$

wobei $f \in \mathcal{C}^\infty([a,b] \times \mathbb{R}^d)$.

(a) Beweisen Sie, dass AWP (1) und AWP (2) äquivalent sind, d.h. $y(x)$ ist genau dann die Lösung vom AWP (1), wenn $Y(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$ die Lösung vom AWP (2) ist.

(b) Es seien $y^{(1)} \approx y(a+h_0)$ und $Y^{(1)} \approx Y(a+h_0)$ die Approximationen an die Lösungen der AWPs, die man nach einem Schritt mit einem beliebigen aber festen RKV für die Schrittweite $h_0 > 0$ klein genug erhält. Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} a+h_0 \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = Y^{(1)}$ gilt.

Aufgabe 4.3 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Beweisen Sie die folgende Aussage: Hat ein s-stufiges RKV (geg. durch A, b, c) die Konsistenzordnung $q \in \mathbb{N}$, dann hat die Quadraturformel

$$Q[g] = \sum_{j=1}^{s} b_j g(c_j) \approx \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$$

den Exaktheitsgrad $q-1$. Wie groß kann q maximal sein?
Hinweis: Betrachten Sie den ersten Schritt für das AWP $\dot{y}(t) = t^n,\ y(0) = 0,\ 0 \le n < q$.

Aufgabe 4.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Betrachten Sie ein allgemeines d-dimensionales AWP

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^d.$$

(a) Schreiben Sie eine `MATLAB`-funktion

```
function [ti,yi] = expl_Runge_Kutta_Verfahren(t0,y0,h,f,T,A,b,c)
```

welche die diskrete Approximation $[ti, yi]$ eines expliziten RKVs (geg. durch $A = (a_{ij})_{ij=1}^{s}$, b, c mit $a_{ij} = 0$ für $j \geq i$ und konstanter Schrittweite $h_i = h$) an den Lösungsgraphen $(t, y(t))$ mit $t \in [t0, T]$ berechnet. Dabei soll mit dem Parameter f die Funktion f übergeben werden ("function handle"-Konzept in `MATLAB`), welche die DGL des AWPs spezifiziert.

(b) Betrachten Sie das 2-dimensionale AWP

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -3y_1(t) \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie ihre `MATLAB`-Funktionen aus Teil (a), um mit dem Runge-Kutta-Verfahren von Dormand und Prince (Bemerkung 1.24 der Vorlesung) die Näherung y_{end} :=`yi(end)`[1] an $y(T)$ mit $T = 1$ für verschiedene Schrittweite $h > 0$ zu berechnen.

Plotten Sie die Norm des Fehlers $y_{\text{end}} - y(T)$ gegen die Schrittweiten $h = 2^{-1}, 2^{-2}, \ldots, 2^{-10}$ in doppeltlogarithmischer Darstellung. Berechnen Sie dazu die exakte Lösung $y(t)$.

[1] `yi(end)` ist hier `MATLAB`-Notation und liefert die letzte Komponente von yi