Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dr. Sarah Eberle
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

---

3. Übungsblatt (erschienen am 05.05.2020)

Aufgabe 3.1 (Votieraufgabe)
Betrachten Sie wieder das AWP

$$\dot{y}(x) = f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 2x & y < 0 \\ 2x - \frac{4y}{x} & 0 \leq y < x^2 \\ -2x & y \geq x^2 \end{cases}, \quad y(0) = 0$$

auf $[0,1]$ (siehe Aufgabe 2.3). Zeigen Sie, dass f nicht lokal und gleichmäßig bezüglich x Lipschitz stetig in y ist und dass $y(x) = \frac{1}{3}x^2$ die eindeutige Lösung des AWPs ist.

Aufgabe 3.2 (Votieraufgabe)
Zeigen Sie, dass für eine Lösung der *autonomen* d-dimensionalen Differentialgleichung $y' = f(y)$

$$y(x+h) = y(x) + hf(y) + \frac{1}{2}h^2 f'(y)f(y) + \frac{1}{6}h^3 \left(f(y)^T f''(y)f(y) + f'(y)^2 f(y)\right) + O(h^4)$$

gilt, wobei $f'(y) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ die Jacobi-Matrix von f ist, y (abkürzend) für $y(x)$ steht und wir für die zweite Ableitung die (formale) Schreibweise

$$u^T f''(y)v = \left(\sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial^2 f_i(y)}{\partial y_j \partial y_k} u_j v_k\right)_{i=1}^{d} \in \mathbb{R}^d$$

für alle $u, v \in \mathbb{R}^d$ verwenden. Dabei genüge f der Generalvoraussetzung aus Abschnitt 1.4 der Vorlesung. Für die Landau-Notation gelte dabei die Konvention aus Bemerkung 1.20.

Aufgabe 3.3 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Es sei $y(x) : [x_i, b] \to \mathbb{R}$ die exakte Lösung des autonomen 1-dimensionalen AWPs

$$y'(x) = f(y(x)), \quad y(x_i) = y_i \in \mathbb{R},$$

wobei die Generalvoraussetzung aus Abschnitt 1.4 der Vorlesung erfüllt sei.
Ferner sei y_{i+1} die numerische Approximation von $y(x_{i+1})$, die man durch einen Schritt mit dem Crank-Nicolson Verfahren mit der Schrittweite $h_i := x_{i+1} - x_i > 0$ ($x_{i+1} \in [x_i, b]$) erhält.

Bestimmen Sie ein maximales $p \in \mathbb{N}$, sodass

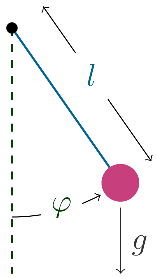
$$y_{i+1} - y(x_{i+1}) = O(h_i^{p+1}) \quad \text{für} \quad h_i \searrow 0$$

für alle AWP von obiger Form gilt, welche der Generalvoraussetzung genügen. Für die Landau-Notation gelte dabei die Konvention aus Bemerkung 1.20.

Aufgabe 3.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Die Differentialgleichung

$$l\varphi''(t) + g\sin(\varphi(t)) = 0, \quad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

modelliert das Verhalten eines Pendels, wobei l dessen Länge und g die Gravitationskonstante beschreibt. Wir betrachten ein Pendelmodell mit $l = 10$ cm und $g = 9,81$ m/s^2.



(a) Formen Sie die DGL zweiter Ordnung in eine DGL erster Ordnung (in allgemeiner Form) um.

(b) Schreiben Sie `MATLAB`-Funktionen

```
[t,phi] = Pendel_Exp_Euler(t0,phi0,dotphi0,h,T),
[t,phi] = Pendel_Impl_Euler(t0,phi0,dotphi0,h,T),
[t,phi] = Pendel_Crank_Nicolson(t0,phi0,dotphi0,h,T),
```

zur numerischen Lösung des AWPs für die Startwerte $\varphi(t0) =$ phi0, $\dot{\varphi}(t0) =$ dotphi0 durch Verwendung des expliziten Eulers, des impliziten Eulers und der Crank-Nicolson Methode auf dem Intervall $[t0, T]$ mit Schrittweite h (in Sekunden). Die Programme sollen in `[t,phi]` die (diskrete) Approximation an den Graphen $(t, \varphi(t))$ mit $t \in [t0, T]$ zurückgeben. Benutzen Sie das Newton-Verfahren zur Lösung impliziter Gleichungen, die im Fall der impliziten Methoden auftreten.

(c) Visualisieren Sie das Pendel für die Startwerte $t0 = 0$, phi0 $= \frac{\pi}{4}$, dotphi0 $= 0$ und eine Schrittweite von $h = 0.005$, sowie für den Endzeitpunkt $T = 7$. Verwenden Sie dabei die `MATLAB`-Funktion

```
visualisierePendel(t,phi,T),
```

welche Sie von der Veranstaltungshomepage herunterladen können. Geben Sie für alle drei Verfahren den finalen Plot zum Endzeitpunkt mit ab.