Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dr. Sarah Eberle
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

2. Übungsblatt (erschienen am 28.04.2020)

Aufgabe 2.1 (Votieraufgabe)
Sei

$$g(x) := \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ und $g^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \geq 0$.

Aufgabe 2.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
(a) Zeigen Sie, dass es zu jedem $C > 0$ eine Funktion φ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$,
- $\varphi(x) = 1$, $x \in (-\infty, C]$,
- $\varphi(x) = 0$, $x \in [C+1, \infty)$.

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 2.1

(b) Ist

$$f : [a,b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad (x,y) \mapsto f(x,y),$$

stetig (in (x,y)) und lokal und bzgl. x glm. Lipschitz stetig in y, so ist die abgeänderte Funktion

$$\tilde{f} : [a,b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad (x,y) \mapsto \tilde{f}(x,y) := f(x,y)\varphi(\|y\|^2)$$

stetig (in (x,y)) und global und bzgl. x glm. Lipschitz stetig in y.

(c) Ist

$$f : [a,b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad (x,y) \mapsto f(x,y),$$

in $\mathcal{C}^\infty([a,b] \times \mathbb{R}^d)$, so ist die abgeänderte Funktion

$$\tilde{f} : [a,b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad (x,y) \mapsto \tilde{f}(x,y) := f(x,y)\varphi(\|y\|^2)$$

in $\mathcal{C}^\infty([a,b] \times \mathbb{R}^d)$ und alle partiellen Ableitungen sind beschränkt.

Aufgabe 2.3 (Votieraufgabe)
Für ein AWP

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

kann man zur analytischen Näherung an die Lösung $y(t)$ zum Zeitpunkt t die sogenannte **Picard-Iteration** verwenden:

$$y^{(k+1)}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^{(k)}(\tau))\mathrm{d}\tau, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Es ist naheliegend, $y^{(0)} \equiv y_0$ zu wählen.

(a) Bestimmen Sie eine Approximation an die Lösung der Riccati-Differentialgleichung

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \dot{y}(t) = y(t)^2 + t^2, \quad y(0) = 0,$$

indem Sie drei Iterationsschritte durchführen.

(b) Betrachten Sie das AWP

$$\dot{y}(x) = f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 2x & y < 0 \\ 2x - \frac{4y}{x} & 0 \leq y < x^2 \\ -2x & y \geq x^2 \end{cases}, \quad y(0) = 0$$

auf $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass die Picard-Iteration für $y^{(0)} \equiv 0$ nicht konvergiert.

Aufgabe 2.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Seien $S(t), I(t)$ und $R(t)$ die Anzahl der gesunden, der infektiösen und der immunen/verstorbenen Individuen im SIR-Modell, $y(t) = (S(t), I(t), R(t))$ und $y(0) = (S(0), I(0), R(0))$ die Werte zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Funktion $y(t)$ erfülle die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{S}(t) \\ \dot{I}(t) \\ \dot{R}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cS(t)I(t) \\ cS(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \gamma I(t) \end{pmatrix} =: F(t, y(t)).$$

Indem man die Ableitung durch einen Differenzenquotienten ersetzt,

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \approx \dot{y}(t) = F(t, y(t)), \quad h > 0 \text{ klein},$$

sieht man, wie man aus den Werten $y(t)$ und $F(t, y(t))$ eine Approximation an $y(t+h)$ berechnen kann. Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

```
function [S,I,R]= SIR(T,h,y0,c,gamma)
```

die so für die Parameter c, γ und $y0 = [S(0), I(0), R(0)]$ die Entwicklung von $y(t)$ bis zu einem Zeitpunkt $T > 0$ approximiert. Unterteilen Sie dazu das Zeitintervall $[0, T]$ äquidistant mit Schrittweite h. Erstellen Sie zwei Plots für die Werte

$$(T, h, y0, \gamma) = \left(500, 0.005, [8 * 10^7, 5 * 10^4, 10^5], \frac{\ln(0.1)}{-14}\right),$$

sowie

$$c = \frac{1.1\gamma}{S(0) + I(0) + R(0)} \text{ (niedrige Infektionsrate) und } c = \frac{3\gamma}{S(0) + I(0) + R(0)} \text{ (hohe Infektionsrate).}$$