Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dr. Sarah Eberle
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

---

11. Übungsblatt (erschienen am 30.06.2020)

Aufgabe 11.1 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Betrachten Sie das folgende 1d-Randwertproblem

$$1 + xu''(x) = x^2, \quad \text{für} \quad 1 < x < 2, \quad u(1) = -\frac{1}{2}, \quad u(2) = \frac{1}{12}. \tag{1}$$

Sei $1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 2$, $N \in \mathbb{N}$ eine äquidistante Diskretisierung des Intervalls mit Schrittweite $h = \frac{1}{N+1}$. Sie können ohne Beweis annehmen, dass eine Lösung $u \in C^4([1,2])$ von (1) existiert. Sei damit $U = (u(x_1), \ldots, u(x_N))$ und $U_h \in \mathbb{R}^N$ eine Approximation an U.

(a) Verwenden Sie zentrale finite Differenzen zur Diskretisierung von $u''(x)$ und geben Sie das resultierende lineare Gleichungssystem $A_h U_h = F_h$ an.

(b) Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für $k = 1, \ldots, N$ durch $\lambda_k = \frac{2}{h^2}(\cos(\pi k h) - 1)$ und $v_k = (v_{k,j})_{j=1}^N$, mit $v_{k,j} = \sin(\pi k j h)$, die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A_h gegeben sind. Zeigen Sie damit: A_h ist invertierbar und es gilt

$$\lim_{h \to 0} \|A_h^{-1}\|_2 = \frac{1}{\pi^2}.$$

(c) Für $v \in \mathbb{R}^N$ bezeichne $\|v\|_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{N}}\|v\|_2$ die gewichtete Euklidnorm. Beweisen Sie

$$\lim_{h \to 0} \|U_h - U\|_{RMS} = 0.$$

Aufgabe 11.2 (Votieraufgabe)
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $u \in C^2(\Omega)$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ und $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir definieren $v : M^{-1}(\Omega) \to \mathbb{R}$[1] durch

$$v(\xi) := u(M\xi) \quad \forall \xi \in M^{-1}(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass $v \in C^2(M^{-1}(\Omega))$ und dass

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} v(\xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) \right]_{x = M\xi},$$

wobei a_{ij} die Koeffizienten von $A := MBM^T$ sind.

---

[1]Wobei hier $M^{-1}(\Omega)$ auch für nicht invertierbare Matrizen einfach das Urbild von Ω unter M (als lineare Abbildung) beschreibt.

Aufgabe 11.3 (Votieraufgabe)
Zeigen Sie, dass das Maximumsprinzip in Satz 2.2 für allgemeine elliptische PDGLn der Form

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) = f \leq 0$$

mit (in jedem Punkt $x \in \Omega$) symmetrischer und positiv definiter Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}$ gilt. Machen Sie sich zuerst klar, warum die Aussage für konstante positiv definite Diagonalmatrizen gilt. Verwenden Sie nun Aufgabe 11.2 um die allgemeine Aussage zu zeigen. Nehmen Sie gegebenfalls A zunächst als konstant (symmetrisch und positiv definit) an.

Aufgabe 11.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Betrachten Sie die PDGL

$$-\Delta u(x,y) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y)\right) = f(x,y), \quad (x,y)^T \in \Omega = (0,1) \times (0,1) \tag{2}$$

mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(0,y) = b_1(y),\ u(1,y) = b_2(y),\ u(x,0) = b_3(x),\ u(x,1) = b_4(x) \quad \text{für} \quad x,y \in (0,1).$$

Für $n \in \mathbb{N},\ h = 1/(n+1)$ ist durch

$$v^{(i+(j-1)n)} := (ih, jh) \in \Omega, \quad i,j = 1,\dots,n$$

eine äquidistante Diskretisierung von Ω mit Schrittweite h gegeben.
Ferner sei

$$F := (f^{(k)})_{k=1,\dots,n^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \quad \text{mit} \quad f^{(k)} := f(v^{(k)})$$

und

$$U := (u^{(k)})_{k=1,\dots,n^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \quad \text{mit} \quad u^{(k)} := u(v^{(k)}).$$

Durch Approximation der zweiten Ableitungen mit zentralen FDs in (2) erhält man:

$$\begin{aligned} f^{(k)} &= -\left[\Delta u(v)\right]_{v=v^{(k)}} \approx -D_{h,1}^2[u](v^{(k)}) - D_{h,2}^2[u](v^{(k)}) \\ &= -\frac{1}{h^2}\left(-4u(v^{(k)}) + u(v^{(k)} + he_1) + u(v^{(k)} - he_1) + u(v^{(k)} + he_2) + u(v^{(k)} - he_2)\right), \end{aligned}$$

wobei

$$D_{h,i}^2[u](v) := \frac{u(v + he_i) - 2u(v) + u(v - he_i)}{h^2}, \quad i = 1,2.$$

Sind neben $v^{(k)}$ auch die Nachbarn $v^{(k)} \pm he_i$ (mit $i = 1,2$) innere Punkte von Ω, so folgt daraus:

$$f^{(k)} \approx \frac{1}{h^2}\left(4u(v^{(k)}) - u(v^{(k-1)}) - u(v^{(k+1)}) - u(v^{(k-n)}) - u(v^{(k+n)})\right).$$

Ist (mindestens) einer der Nachbarn ein Randpunkt von Ω, so bekommt man einen analogen Ausdruck, bei dem die Dirichlet-Randbedingungen mit einfließen. Unter Verwendung der Kronecker-Multiplikation[2] gilt für

$$A_h := \frac{1}{h^2}\left(I_n \otimes T + T \otimes I_n\right), \quad T := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

[2] Für $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{a \times b}$ und $W \in \mathbb{R}^{c \times d}$ ist $M \otimes W := (m_{ij} W) \in \mathbb{R}^{ac \times bd}$.

und einen geeigneten Vektor $B_h \in \mathbb{R}^n$ (abhängig von den Dirichlet-Randbed.) damit

$$A_h U + B_h \approx F.$$

Folglich ist $U_h := A_h^{-1}(F - B_h) \in \mathbb{R}^{n^2}$ eine Approximation an U.

(a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion.

```
function [U_h] = approx_U_h(f,b1,b2,b3,b4,n),
```

die U_h in Abhängigkeit von f, b_1, b_2, b_3, b_4 und $n \in \mathbb{N}$ berechnet. Bestimmen Sie dazu zuerst B_h.

(b) Berechnen und visualisieren Sie U_h für homogene Dirichlet-Randwerte, $n = 50$ und

$$f(x,y) := \begin{cases} 300 & \text{falls} \quad (x,y) \in F_1 \setminus F_2, \\ 240 & \text{falls} \quad (x,y) \in E_1 \cup E_2, \\ 180 & \text{falls} \quad (x,y) \in M, \\ -60 & \text{falls} \quad (x,y) \in F_2 \setminus (E_1 \cup E_2 \cup M), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei

$$\begin{aligned} F_1 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 < 0.35^2\}, \\ F_2 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 < 0.3^2\}, \\ E_1 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-0.4)^2 + (y-0.6)^2 < 0.05^2\}, \\ E_2 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-0.6)^2 + (y-0.6)^2 < 0.05^2\}, \\ M &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0.15^2 < (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 < 0.2^2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < 0.45\}. \end{aligned}$$

(c) Berechnen und visualisieren Sie U_h für $b_1 \equiv b_2 \equiv b_3 \equiv 0$, $b_4(x) = \sin(2\pi x)$, $n = 50$ und $f \equiv 0$.

Hinweis: Mit dem folgenden MATLAB-Code lässt sich U_h geeignet visualisieren:

```
h=1/(n+1);
U_h_matrix=reshape(U_h,n,n)';
[X,Y]=meshgrid(h:h:(1-h),h:h:(1-h));
surf(X,Y,U_h_matrix,'FaceColor','interp','EdgeAlpha',0);
xlabel('x-Achse');
ylabel('y-Achse');
zlabel('u(x,y)');
```