GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

10. Übungsblatt (erschienen am 23.06.2020)

Aufgabe 10.1 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Betrachten Sie wieder das instabile Mehrschrittverfahren aus Beispiel 1.53

$$y_{i+1} + 4y_i - 5y_{i-1} = h(4f_i + 2f_{i-1})$$

und dazu die Testgleichung

$$y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass $A(h), B(h) \in \mathbb{R}$ existieren (abhängig von h und den Startwerten $y_0(h), y_1(h)$), so dass

$$y_n(h) = A(h)\zeta_1^n(h) + B(h)\zeta_2^n(h) \quad , n \in \mathbb{N}_0$$

die Iterierten des Verfahrens (mit Schrittweite h) angewandt auf (1) sind, mit $\zeta_1(h), \zeta_2(h)$ den Lösungen von

$$\zeta^2 + 4(1-h)\zeta - (5+2h) = 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass für (exakte) Startwerte $y_0(h) = 1$ und $y_1(h) = e^h$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} |y_n(1/n)| = \infty.$$

Aufgabe 10.2 (Votieraufgabe)
Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$-w''(x) + b(x)w'(x) = 1, \quad x \in (0,1), \quad w(0) = w(1) = 0$$

mit $b \in C^2([0,1])$ eine eindeutige Lösung $w \in C^4([0,1])$ hat. Substituieren Sie dazu zunächst $v = w'$ und machen Sie einen Ansatz $v(x) = a(x) \exp\left(\int_0^x b(t)\mathrm{d}t\right)$.

Aufgabe 10.3 (Votieraufgabe)
Wir betrachten das Randwertproblem

$$-(a(x)u'(x))' + u(x) = f(x) \quad \text{in } (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0, \tag{2}$$

wobei $a \in C^3[0,1]$ sei mit $a > 0$. Wir diskretisieren auf einem äquidistanten Gitter $x_i = ih$ mit $h = \frac{1}{n+1}$ für $i = 1, ..., n$ durch

$$(a(x)u'(x))' \approx D_h^{2,a}[u](x) := \frac{1}{h^2}\left(a(x+h/2)(u(x+h) - u(x)) - a(x-h/2)(u(x) - u(x-h))\right). \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie, dass für $u \in C^4([0,1])$

$$\|D_h^{2,a}[u](x_i) - (a(x_i)u'(x_i))'\| = \mathcal{O}(h^2)$$

.

(b) Stellen Sie mittels (3) die Diskretisierungsmatrix L_h zu (2) auf und zeigen Sie, dass diese invertierbar ist.

Aufgabe 10.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Betrachten Sie das Randwertproblem

$$L[u] = -u''(x) + bu'(x) = 0, \quad x \in (0,1)$$

mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen $u(0) = 0, u(1) = 1$ und $0 > b \in \mathbb{R}$.
Die Lösung ist gegeben durch

$$u(x) = C_1 e^{bx} + C_2$$

mit $C_1 = -1/(1-e^b)$ und $C_2 = -C_1$. Statt ausschließlich zentrale finite Differenzen (FDs) zur Diskretisierung zu verwenden, können z.B. auch rechtsseitige finite Differenzen

$$D_h^+[u](x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \approx u'(x)$$

verwendet werden. Ersetzt man nun für homogene Dirichlet-Randbedingungen, ähnlich wie bei der Diskretisierung in Abschnitt 1.8.2, die ersten Ableitungen $u'(x_i)$ (für $u''(x_i)$ sind weiter zentrale FDs zu verwenden) auf dem Gitter $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n+1$, $h = 1/(n+1)$ durch rechtsseitige FDs, so erhält man das Gleichungssystem

$$L_h^+ U_h^+ = 0.$$

Für homogene Dirichlet-Randwerte würde man durch Diskretisieren mit zentralen FDs das lineare Gleichungssystem

$$L_h U_h = 0$$

mit L_h aus Abschnitt 1.8.2 erhalten. Aufgrund der inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen erhält man jedoch jeweils inhomogene lineare Gleichungssysteme

$$L_h U_h + B_h = 0 \quad \text{bzw.} \quad L_h^+ U_h^+ + B_h^+ = 0$$

mit $B_h, B_h^+ \in \mathbb{R}^n$ $(h = 1/(1+n))$.

(a) Geben Sie L_h, L_h^+ und B_h, B_h^+ an.

(b) Implementieren Sie die beiden finite Differenzen-Methoden in `MATLAB`, zur Berechnung von

$$U_h = -{L_h}^{-1} B_h \quad \text{bzw.} \quad U_h^+ = -{L_h^+}^{-1} B_h^+$$

für $0 < h \in \mathbb{R}$ und $0 > b \in \mathbb{R}$.

(c) Plotten Sie (in einen gemeinsamen Plot) die Fehlerterme $\|U - U_{h_i}\|_\infty$ und $\|U - U_{h_i}^+\|_\infty$ für $h_i = \frac{1}{2^i+1}$, $i = 7, 8, \dots, 13$ und $b = -1$, wobei $U = (u(h), u(2h), \dots, u(1-h))$ ist (der Rand ist also ausgenommen).

(d) Machen Sie die gleichen Plots wie in (c) für $b = -10^3$.

(e) Plotten Sie die Approximationen U_h und U_h^+ zusammen mit der exakten Lösung u für $h = \frac{1}{2^5+1}$ und $b = -10^3$.