

1. Übungsblatt (erschienen am 21.04.2020)

Aufgabe 1.1 (Votieraufgabe)

Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme für $y(t)$.

(a) $\dot{y} = e^{5t}y, \quad y(0) = 1,$

(b) $\dot{y} = \lambda y + \sin(kt), \quad y(0) = 0, \quad \lambda, k \in \mathbb{R},$

(c) $y^3 \dot{y} = -t^2, \quad y(0) = 2.$

Verwenden Sie dazu zunächst formal die Technik der Separation der Variablen und/oder Variation der Konstanten und zeigen Sie dann rigoros, dass die so ermittelten Funktionen die Differentialgleichungen lösen.

Aufgabe 1.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Seien $x_0, x_{\text{end}} \in \mathbb{R}, x_{\text{end}} > x_0$. Zeigen Sie, dass

(a) die Menge der auf $[x_0, x_{\text{end}}]$ stetigen Funktionen

$$C([x_0, x_{\text{end}}])^d := \{y : [x_0, x_{\text{end}}] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ stetig}\}$$

ein reeller Vektorraum ist,

(b) die Abbildung

$$C([x_0, x_{\text{end}}])^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \|y\|_\infty := \max_{x \in [x_0, x_{\text{end}}]} \|y(x)\|$$

eine Norm bildet,

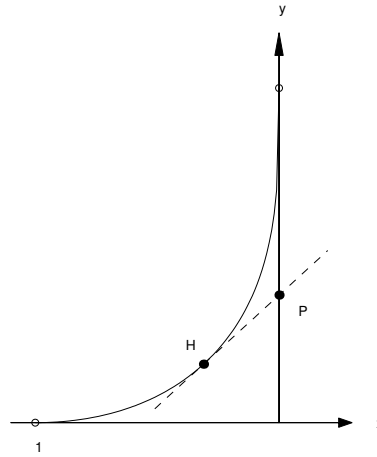
(c) $(C([x_0, x_{\text{end}}])^d, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 1.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich eine Person P im Nullpunkt $(0, 0)$ und wandert mit konstanter Geschwindigkeit a in Richtung der positiven y -Achse. Ein Hund H läuft ausgehend vom Punkt $(-1, 0)$ mit konstanter Geschwindigkeit c immer auf die Person zu. Die Position des Hundes sei gegeben durch die Funktion $(x(t), y(t))$.

(a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function Hund(a,c,T,h)
```



die für die (nichtnegativen) Geschwindigkeiten $a, c \in \mathbb{R}$ die Bewegung des Hundes und der Person in der (x, y) -Ebene bis einem Zeitpunkt $T > 0$ veranschaulicht. Unterteilen Sie dazu das Zeitintervall $[0, T]$ in die Zeitpunkte $[0, h, 2h, 3h, \dots, T]$ ($h > 0$) und berechnen Sie für jeden Zeitpunkt die Position der Person und des Hundes aus den vorherigen Positionen (als diskrete Approximation).

Der Hund geht hierbei in jedem Zeitschritt auf die alte Position des Herrchens zu. Erstellen Sie insgesamt sechs Plots zu folgenden Werten: $T = 2$, $h = 0.1$ und $h = 0.01$, sowie $(a, c) = (2, 1)$, $(a, c) = (1, 2)$ und $(a, c) = (2, 2)$.

- (b) Überlegen Sie anhand Ihrer Vorschrift zur Veränderung der Bewegung des Hundes, welcher Differentialgleichung $(x(t), y(t))$ genügt (schriftlich).

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** ist eine Ausarbeitung anzufertigen.
- Zu **Programmieraufgaben** ist ein **kommentierter MATLAB-Quellcode** zu schreiben, welcher die entsprechenden Plots generiert.
- Fügen Sie die eingescannte schriftliche Ausarbeitung sowie den Quellcode und die Plots zu einer einzigen PDF-Datei zusammen und schicken Sie diese bis zum 28.04.2020 um 10:00 Uhr an tutoriumnumerik@math.uni-frankfurt.de. Nutzen Sie dazu Ihre studentische E-Mail-Adresse.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt.