Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2019
Dr. Sarah Eberle
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

9. Übungsblatt (erschienen am 11.06.2019)

Aufgabe 9.1 (Votieraufgabe)
Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$-w''(x) + b(x)w'(x) = 1, \quad x \in (0,1), \quad w(0) = w(1) = 0$$

mit $b \in C^2([0,1])$ eine eindeutige Lösung $w \in C^4([0,1])$ hat. Substituieren Sie dazu zunächst $v = w'$ und setzen Sie $v(x) = a(x)\exp\left(\int_0^x b(t)\mathrm{d}t\right)$ (Variation der Konstanten).

Aufgabe 9.2 (schriftliche Aufgabe)[2+2 Punkte]
Betrachten Sie das Randwertproblem aus Abschnitt 1.8.2 der Vorlesung (leicht vereinfachte Diffusionsgleichung)

$$L[u] = -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1)$$

mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen $u(0) = 0 = u(1)$. Statt ausschließlich zentrale finite Differenzen (FDs) zur Diskretisierung zu verwenden, können z.B. auch einseitige finite Differenzen

$$D_h^+[u](x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \approx u'(x) \quad \text{(rechtsseitige FDs)}$$

bzw.

$$D_h^-[u](x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \approx u'(x) \quad \text{(linksseitige FDs)}$$

verwendet werden. Ersetzt man nun, ähnlich wie bei der Diskretisierung in Abschnitt 1.8.2, die ersten Ableitungen $u'(x_i)$ auf dem Gitter $x_i = ih$, $i = 0,1,\ldots,n+1$, $h = 1/(n+1)$ durch die linksseitigen bzw. rechtsseitigen FDs (Achtung: Für die zweiten Ableitungen sollen weiterhin zentrale finiten Differenzen verwendet werden!), erhält man die Gleichungssysteme

$$L_h^+ U_h^+ = F \quad \text{bzw.} \quad L_h^- U_h^- = F.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrizen $L_h^+, L_h^- \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Es sei $u \in C^\infty([0,1])$. Bestimmen Sie $p \in \mathbb{N}$ bzw. $q \in \mathbb{N}$ maximal mit

$$D_h^+[u](x_i) = u'(x_i) + O(h^p) \quad \text{bzw.} \quad D_h^-[u](x_i) = u'(x_i) + O(h^q), \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Aufgabe 9.3 (Programmieraufgabe)[1+2+1+1+1 Punkte]
Betrachten Sie das Randwertproblem

$$L[u] = -u''(x) + bu'(x) = 0, \quad x \in (0,1)$$

mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen $u(0) = 0, u(1) = 1$ und $0 > b \in \mathbb{R}$.
Die Lösung ist gegeben durch

$$u(x) = C_1 e^{bx} + C_2$$

mit $C_1 = -1/(1-e^b)$ und $C_2 = -C_1$. Für homogene Dirichlet-Randwerte, würde man durch Diskretisieren mit zentralen FDs bzw. unter Verwendung von rechtsseitigen FDs (für $u'(x)$) die linearen Gleichungssysteme

$$L_h U_h = 0 \quad \text{bzw.} \quad L_h^+ U_h^+ = 0$$

mit L_h aus Abschnitt 1.8.2 bzw. L_h^+ aus Aufgabe 9.2 erhalten. Aufgrund der inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen erhält man jedoch inhomogene lineare Gleichungssysteme

$$L_h U_h + B_h = 0 \quad \text{bzw.} \quad L_h^+ U_h^+ + B_h^+ = 0$$

mit $B_h, B_h^+ \in \mathbb{R}^n$ $(h = 1/(1+n))$.

(a) Geben Sie L_h, L_h^+ und B_h, B_h^+ an.

(b) Implementieren Sie die beiden finite Differenzen-Methoden in `MATLAB`, zur Berechnung von

$$U_h = -{L_h}^{-1} B_h \quad \text{bzw.} \quad U_h^+ = -{L_h^+}^{-1} B_h^+$$

für $0 < h \in \mathbb{R}$ und $0 > b \in \mathbb{R}$.

(c) Plotten Sie die Fehlerterme $\|U - U_{h_i}\|_\infty$ und $\|U - U_{h_i}^+\|_\infty$ für $h_i = \frac{1}{2^i+1}$, $i = 7, 8, \ldots, 13$ und $b = -1$, wobei $U = (u(h), u(2h), \ldots, u(1-h))$ ist (der Rand ist also ausgenommen).

(d) Machen Sie die gleichen Plots wie in (c) für $b = -10^3$.

(e) Plotten Sie die Approximationen U_h und U_h^+ zusammen mit der exakten Lösung u für $h = \frac{1}{2^5+1}$ und $b = -10^3$.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche am 18.06.2019 in der Übung abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll bis zum 18.06.2019 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"DGL9_2019:"**

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.