Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2019
Dr. Sarah Eberle
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

Kombiniertes 7. und 8. Übungsblatt (erschienen am 28.05.2019)

Aufgabe 7.1 (Votieraufgabe)

(a) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion für die Crank-Nicolson-Methode und prüfen Sie, ob die Methode A-stabil, L-stabil oder Isometrie-erhaltend ist.

(b) Beweisen Sie die Aussage aus Bsp. 1.30(c) der Vorlesung: Zeigen Sie, dass die implizite Mittelpunktsregel A-stabil und Isometrie-erhaltend, jedoch nicht L-stabil ist.

(c) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion der zweistufigen Methode in `ode23s` aus Beispiel 1.37 (c).

Aufgabe 7.2 (schriftliche Aufgabe)[5 Punkte]
Betrachten Sie die in Beispiel 1.37 beschriebene dreistufige Methode zur Berechnung von $\hat{y}$ in `ode23s`, angewandt auf das autonome skalare AWP

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y'(x) = f(y(x)), \quad y(0) = y_0.$$

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $k_1 = f + haf'f + h^2a^2f'^2f + O(h^3)$,

(ii) $k_2 = f + h\frac{1}{2}f'f + h^2\left((a - a^2)f'^2f + \frac{1}{8}f''f^2\right) + O(h^3)$,

(iii) $k_3 = f + h(1 - a)f'f + h^2\left(\frac{1}{2}f''f^2 + a^2f'^2f\right) + O(h^3)$,

wobei hier die Abkürzungen $f := f(y_0)$, $f' := f'(y_0)$ und $f'' := f''(y_0)$ verwendet werden. Orientieren Sie sich dazu an der Vorgehensweise aus dem Beweis zu Satz 1.39.
Hinweis: Es ist $d_{31} + d_{32} = 2a$ und $\frac{1}{2} - d_{31}a - \frac{1}{2}d_{32} + a = 2a^2$.

(b) Zeigen Sie mithilfe von Teil (a), dass $\hat{y}_1 = y(h) + O(h^4)$ gilt.
Hinweis: Es ist $4a - 2a^2 = 1$.

Aufgabe 7.3 (Programmieraufgabe)[1+3+2 Punkte]
Wir betrachten für $u : (0,1) \times (0,T) \to \mathbb{R} : (x,t) \mapsto u(x,t)$ und $T > 0$ die 1d-Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = g(x). \tag{2}$$

Wir diskretisieren die x-Koordinate mit $N + 1$ äquidistanten Gitterpunkten $x_j = x_{j-1} + \Delta x, j = 1, 2, \ldots, N$, wobei $x_0 = 0$ ist. Weiterhin approximieren wir die Ableitung 2. Ordnung in (1) durch den zentralen Differenzenquotienten 2. Ordnung, so dass die $u_j := u(x_j, t)$ für $j = 1, \dots, N-1$ folgende Gleichungen erfüllen müssen:

$$\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta x)^2}.$$

Dieses System von $N-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen kann in Matrixform geschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Au \quad \text{mit} \quad u = (u_1, \dots, u_{N-1})^T \quad \text{und} \quad A := \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}. \quad (3)$$

(a) Erstellen Sie einen Plot des kleinsten negativen Eigenwertes von A über N.
Hinweis: Verwenden Sie `spdiags` um A zu erstellen, sowie `eigs` zur Bestimmung des Eigenwertes.

(b) Schreiben Sie `MATLAB`-Funktionen

```
[t,x,u] = ExpEuler(T,h,Delta_x,g,A),
[t,x,u] = ImpEuler(T,h,Delta_x,g,A),
[t,x,u] = Midpoint(T,h,Delta_x,g,A),
```

zur numerischen Lösung von (2)-(3) durch Verwendung des expliziten Eulerverfahrens, des impliziten Eulerverfahrens und der impliziten Mittelpunktsregel. Die Programme sollen in `[t,x,u]` die diskrete Approximation an den Graphen $(t, x, u(x,t))$ zurückgeben.

(c) Testen Sie ihre Programme aus dem (b)-Teil für $T = 2, \Delta x = 0.05$, A aus (3), $h_1 = 0.001$, $h_2 = 0.0015$, $h_3 = 0.003$, $h_4 = 0.03$ und die Anfangstemperaturverteilung

$$g(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Plotten Sie ihre Approximationen `[x,u]` des expliziten und impliziten Eulerverfahrens, sowie der impliziten Mittelpunktsregel zum Zeitpunkt $t = 0.03$ für h_1 und h_2.

(ii) Plotten Sie ihre Approximationen `[x,u]` des impliziten Eulerverfahrens und der impliziten Mittelpunktsregel zum Zeitpunkt $t = 0.03$ für h_3 und h_4.

Aufgabe 8.1 (schriftliche Aufgabe)[2+2 Punkte]
Zur Berechnung der diskreten Approximation $y_i \approx y(x_i)$, $i \in \mathbb{N}_0$ (mit konstanter Schrittweite $h > 0$ und $x_i = x_0 + ih$) an die Lösung des AWPs

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R},$$

betrachten wir ein Milne-Simpson-Verfahren der Form

$$y_{i+1} = y_{i-1} + h \sum_{j=1}^{m+1} \beta_j f_{i-m+j}, \quad i \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f_{i-m+j} := f(x_{i-m+j}, y_{i-m+j}),$$

wobei $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m+1}$ wie im Abschnitt 1.7.1 der Vorlesung beschrieben gegeben sind.

Im Folgenden setzen wir $m = 2$ und nehmen an, dass die Funktion f des AWPs die Generalvoraussetzung aus Abschnitt 1.4 erfülle.

(a) Zeigen Sie, dass $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1/3, 4/3, 1/3)$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass das Verfahren Konsistenzordnung 4 hat. Beschränken Sie sich dabei auf skalare DGLn $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y'(x) = f(x, y(x))$.

Hinweis: Für $g \in C^4(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei die Simpson-Quadraturformel gegeben durch

$$S[g] = \frac{b-a}{6}\left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)\right) \approx \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Ferner gilt die folgende Fehlerabschätzung: für $h := \frac{b-a}{2}$ existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\left|S[g] - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{h^5}{90}\left|g^{(4)}(\xi)\right|.$$

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche am 11.06.2019 in der Übung abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll bis zum 11.06.2019 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"DGL7_2019:"**

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.