6. Übungsblatt (erschienen am 21.05.2019)

Aufgabe 6.1 (schriftliche Aufagbe)[3 Punkte]

Gegeben Sei ein autonomes AWP

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d,\ y'(x) = f(y(x)), \quad y(0) = y_0.$$

Betrachten Sie das zugehörige linearisierte AWP

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d,\ y'(x) = f(y_0) + f'(y_0)(y(x) - y_0),\ y(0) = y_0. \tag{1}$$

Nun soll angenommen werden, dass $f'(y_0) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ regulär und diagonalisierbar ist, d.h. es existiert eine reguläre Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{d\times d}$ und eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{C}^{d\times d}$, so dass $f'(y_0) = TDT^{-1}$ ist. Bestimmen Sie $v \in \mathbb{C}^d$ und $z_0 \in \mathbb{C}^d$, so dass für die Lösung des AWP

$$z' = Dz, \quad z(0) = z_0$$

gilt, dass $y(x) = Tz(x) + v$ das linearisierte AWP (1) löst.

Aufgabe 6.2 (schriftliche Aufgabe)[2 Punkte]

Betrachten Sie das AWP

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{C}^d, \quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass Runge-Kutta-Verfahren invariant unter Koordinatentransformationen sind. D.h., ist $T \in \mathbb{C}^{d\times d}$ eine reguläre Transformationsmatrix, $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_N$ die Iterierten eines RKVs angewandt auf das AWP (2) und $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_N$ die Iterierten desselben RKVs angewandt auf das transformierte AWP

$$\hat{y}'(x) = \hat{f}(x, \hat{y}(x)), \quad \hat{y}(x_0) = \hat{y}_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \hat{y}_0 \in \mathbb{C}^d \tag{3}$$

mit $\hat{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$, $\hat{f} : (x, y) \mapsto Tf(x, T^{-1}y)$ und $\hat{y}_0 := Ty_0$, dann gilt:

$$y_i = T^{-1}\hat{y}_i$$

für $i = 0, 1, 2, \ldots, N$ und $0 < h_i < h_0$, $\forall i$ und h_0 klein genug.

Aufgabe 6.3 (Programmieraufgabe)[5 Punkte]

(a) Schreiben Sie analog zu Teil (a) von Aufgabe 4.5 eine `MATLAB`-Funktion

```
function [ti,yi] = impl_Runge_Kutta_Verfahren(t0,y0,h,f,fy,T,A,b,c),
```

für implizite Runge-Kutta-Verfahren, d.h. A ist keine linke untere Dreiecksmatrix. Verwenden Sie dazu das Newton-Verfahren[1] aus Aufgabe 4.4. Zusätzlich zu dem Parameter **f** (wie beim expl. Verfahren) soll mit dem Parameter **fy** die Ableitung $f_y(x, y)$ übergeben werden, welche für das Newton-Verfahren benötigt wird.

(b) Erstellen Sie mithilfe Ihrer `MATLAB`-Funktion Fehlerplots wie in Teil (b) von Aufgabe 4.5 beschrieben für alle impliziten RKVs aus Abschnitt 1.3.4.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche am 28.05.2019 in der Übung abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll bis zum 28.05.2019 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"DGL6_2019:"**

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

[1] Es bietet sich hier an den `MATLAB`\-Operator und die MATLAB-Funktion **kron** zu verwenden. Die Wahl einer geeigneten Abbruchbedingung für das Newton-Verfahren steht Ihnen frei.