

4. Übungsblatt (erschienen am 07.05.2019)

Aufgabe 4.1 (Votieraufgabe)

Bei den Verfahren aus Abschnitt 1.3.4 handelt es sich um Runge-Kutta Verfahren (RKV). Bestimmen Sie die dazugehörigen Butcher-Tableaus.

Aufgabe 4.2 (Votieraufgabe)

Betrachten Sie das nicht autonome d -dimensionale AWP

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(a) = y_0 \in \mathbb{R}^d \quad (1)$$

und das dazugehörige autonome $(d+1)$ -dimensionale AWP

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} Y_1'(x) \\ Y_2'(x) \end{pmatrix} = F(Y(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(Y_1(x), Y_2(x)) \end{pmatrix}, \quad Y(a) = \begin{pmatrix} a \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}. \quad (2)$$

Es seien $y^{(1)} \approx y(a + h_0)$ und $Y^{(1)} \approx Y(a + h_0)$ die Approximationen an die Lösungen der AWP, die man nach einem Schritt mit einem beliebigen aber festen RKV für die Schrittweite $h_0 > 0$ erhält.

(a) Beweisen Sie, dass AWP (1) und AWP (2) äquivalent sind, d.h. $y(x)$ ist genau dann die Lösung vom AWP (1), wenn $Y(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$ die Lösung vom AWP (2) ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} a + h_0 \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = Y^{(1)}$ gilt.

Aufgabe 4.3 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]

Beweisen Sie die folgende Aussage: Hat ein s -stufiges RKV (geg. durch A, b, c) die Konsistenzordnung $q \in \mathbb{N}$, dann hat die Quadraturformel

$$Q[g] = \sum_{j=1}^s b_j g(c_j) \approx \int_0^1 g(t) dt$$

den Exaktheitsgrad $q - 1$. Wie groß kann q maximal sein?

Hinweis: Betrachten Sie den ersten Schritt für das AWP $\dot{y}(t) = t^n$, $y(0) = 0$, $0 \leq n < q$.

Aufgabe 4.4 (Votieraufgabe)

(a) Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\eta_j = y_i + h_i \sum_{l=1}^s a_{jl} f(x_i + c_l h_i, \eta_l), \quad j = 1, \dots, s,$$

aus der ersten Formulierung eines allgemeinen RKVs für ein skalares AWP, d.h. $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$ ist eine skalare Funktion.

Entwickeln Sie für dieses Gleichungssystem eine möglichst vereinfachte Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens zur Berechnung des Vektors

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s)^T \in \mathbb{R}^s,$$

wobei $\eta^{(0)} = (y_i, y_i, \dots, y_i)^T \in \mathbb{R}^s$ der Startvektor dieser Iteration sei.

- (b) Lösen Sie Teil (a) für ein allgemeines (nicht notwendigerweise skalares) AWP, d.h. $y'(x) = f(x, y(x))$ mit $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ für $d \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 4.5 (Programmieraufgabe)[5 Punkte]

Betrachten Sie ein allgemeines d -dimensionales AWP

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^d.$$

- (a) Schreiben Sie eine MATLAB-funktion

```
function [ti,yi] = expl_Runge_Kutta_Verfahren(t0,y0,h,f,T,A,b,c)
```

welche die diskrete Approximation $[t_i, y_i]$ eines expliziten RKVs (geg. durch $A = (a_{ij})_{ij=1}^s$, b, c mit $a_{ij} = 0$ für $j \geq i$ und konstanter Schrittweite $h_i = h$) an den Lösungsgraphen $(t, y(t))$ mit $t \in [t_0, T]$ berechnet. Dabei soll mit dem Parameter f die Funktion f übergeben werden ("function handle"-Konzept in MATLAB), welche die DGL des AWP spezifiziert.

- (b) Betrachten Sie das 2-dimensionale AWP

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -3y_1(t) \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie ihre MATLAB-Funktionen aus Teil (a), um mit dem Runge-Kutta-Verfahren von Dormand und Prince (Bemerkung 1.24 der Vorlesung) die Näherung $y_{\text{end}} := y_i(\text{end})^1$ an $y(T)$ mit $T = 1$ für verschiedene Schrittweite $h > 0$ zu berechnen.

Plotten Sie die Norm des Fehlers $y_{\text{end}} - y(T)$ gegen die Schrittweiten $h = 2^{-1}, 2^{-2}, \dots, 2^{-10}$ in doppeltlogarithmischer Darstellung. Berechnen Sie dazu die exakte Lösung $y(t)$.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche am 14.05.2019 in der Übung abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben** soll bis zum 14.05.2019 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in MATLAB-Code an ihren Übungsleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit "**DGL4_2019:**"
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

¹ $y_i(\text{end})$ ist hier MATLAB-Notation und liefert die letzte Komponente von y_i