

3. Übungsblatt (erschienen am 29.04.2019)

Aufgabe 3.1 (Votieraufgabe)

Gegeben sei das AWP

$$y'(x) = (1 + |y(x)|)^{-1}, \quad y(0) = 0 \quad \text{für } x \in [0, 10].$$

Zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $y(x)$ für alle $x \in [0, 10]$.

Aufgabe 3.2 (Votieraufgabe)

Zeigen Sie, dass die folgenden AWP keine Lösungen besitzen:

(a) $(y'(x))^2 + y(x)^2 + 1 = 0, \quad y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(a) = y_0 \quad \text{für } a, y_0 \in \mathbb{R},$

(b) $y'(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(0) = 0.$

Aufgabe 3.3 (Votieraufgabe)

Zeigen Sie, dass für eine Lösung der autonomen d -dimensionalen Differentialgleichung $y' = f(y)$

$$y(x+h) = y(x) + hf(y) + \frac{1}{2}h^2 f'(y)f(y) + \frac{1}{6}h^3 (f(y)^T f''(y)f(y) + f'(y)^2 f(y)) + O(h^4)$$

gilt, wobei $f'(y) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ die Jacobi-Matrix von f ist, y (abkürzend) für $y(x)$ steht und wir für die zweite Ableitung die (formale) Schreibweise

$$u^T f''(y)v = \left(\sum_{j,k=1}^d \frac{\partial^2 f_i(y)}{\partial y_j \partial y_k} u_j v_k \right)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$$

für alle $u, v \in \mathbb{R}^d$ verwenden. Dabei genüge f der Generalvoraussetzung aus Abschnitt 1.4 der Vorlesung. Für die Landau-Notation gelte dabei die Konvention aus Bemerkung 1.20.

Aufgabe 3.4 (schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]

Es sei $y(x) : [x_i, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die exakte Lösung des autonomen 1-dimensionalen AWP

$$y'(x) = f(y(x)), \quad y(x_i) = y_i \in \mathbb{R},$$

wobei die Generalvoraussetzung aus Abschnitt 1.4 der Vorlesung erfüllt sei.

Ferner sei y_{i+1} die numerische Approximation von $y(x_{i+1})$, die man durch einen Schritt mit dem Crank-Nicolson Verfahren mit der Schrittweite $h_i := x_{i+1} - x_i > 0$ ($x_{i+1} \in [x_i, b]$) erhält.

Bestimmen Sie ein maximales $p \in \mathbb{N}$, sodass

$$y_{i+1} - y(x_{i+1}) = O(h_i^{p+1}) \quad \text{für } h_i \searrow 0$$

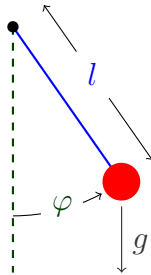
für alle AWP von obiger Form gilt, welche der Generalvoraussetzung genügen. Für die Landau-Notation gelte dabei die Konvention aus Bemerkung 1.20.

Aufgabe 3.5 (Programmieraufgabe)[1+2+3+1 Punkte]

Die Differentialgleichung

$$l\varphi''(t) + g \sin(\varphi(t)) = 0, \quad \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

modelliert das Verhalten eines Pendels, wobei l dessen Länge und g die Gravitationskonstante beschreibt. Wir betrachten ein Pendelmodell mit $l = 10$ cm und $g = 9,81$ m/s².



- Formen Sie die DGL zweiter Ordnung in eine DGL erster Ordnung (in allgemeiner Form) um.
- Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Lösung der impliziten Gleichung im impliziten Euler-Verfahren und in der Crank-Nicolson Methode.
- Schreiben Sie MATLAB-Funktionen

```
[t,phi] = Pendel_Exp_Euler(t0,phi0,dotphi0,h,T),  
[t,phi] = Pendel_Impl_Euler(t0,phi0,dotphi0,h,T),  
[t,phi] = Pendel_Crank_Nicolson(t0,phi0,dotphi0,h,T),
```

zur numerischen Lösung des AWP für die Startwerte $\varphi(t_0) = \text{phi0}$, $\dot{\varphi}(t_0) = \text{dotphi0}$ durch Verwendung des expliziten Eulers, des impliziten Eulers und der Crank-Nicolson Methode auf dem Intervall $[t_0, T]$ mit Schrittweite h (in Sekunden). Die Programme sollen in `[t,phi]` die (diskrete) Approximation an den Graphen $(t, \varphi(t))$ mit $t \in [t_0, T]$ zurückgeben. Benutzen Sie das Newton-Verfahren zur Lösung impliziter Gleichungen, die im Fall der impliziten Methoden auftreten.

- Visualisieren Sie das Pendel für die Startwerte $t_0 = 0$, $\text{phi0} = \frac{\pi}{4}$, $\text{dotphi0} = 0$ und eine Schrittweite von $h = 0.001$ bzw. $h = 0.005$, sowie für den Endzeitpunkt $T = 7$. Verwenden Sie dabei die MATLAB-Funktion

```
visualisierePendel(t,phi,T),
```

welche Sie von der Veranstaltungshomepage herunterladen können.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche am 07.05.2019 in der Übung abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben** soll bis zum 07.05.2019 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in MATLAB-Code an ihren Übungsleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit "**DGL3_2019:**"
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.