Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2019
Dr. Sarah Eberle
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

2. Übungsblatt (erschienen am 23.04.2019)

Aufgabe 2.1 (Votieraufgabe)
Schreiben Sie das Anfangswertproblem (AWP) 3. Ordnung

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y(x), \quad y''' = \sqrt{x^2+1}y'' - 12y'y + x - 9, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 17,\ y''(0) = 0$$

um in ein (äquivalentes) System von Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Aufgabe 2.2 (Votieraufgabe)

(a) Zeigen Sie, dass es zu jedem $C > 0$ eine Funktion φ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$,
- $\varphi(x) = 1$, $x \in (-\infty, C]$,
- $\varphi(x) = 0$, $x \in [C+1, \infty)$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Funktion $e^{-\frac{1}{|x|}}$ beliebig oft differenzierbar ist und alle Ableitungen der Funktion $e^{-\frac{1}{|x|}}$ im Punkt $x = 0$ gleich Null sind.

(b) Ist

$$f : [a,b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad (x,y) \mapsto f(x,y),$$

stetig (in (x,y)) und lokal und bzgl. x glm. Lipschitz stetig in y, so ist die abgeänderte Funktion

$$\tilde{f} : [a,b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad (x,y) \mapsto \tilde{f}(x,y) := f(x,y)\varphi(\|y\|^2)$$

stetig (in (x,y)) und global und bzgl. x glm. Lipschitz stetig in y.

Aufgabe 2.3 (schriftliche Aufgabe)[2+5 Punkte]
Für ein AWP

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

kann man zur Näherung an die analytische Lösung $y(t)$ zum Zeitpunkt t die sogenannte **Picard-Lindelöf-Iteration** verwenden:

$$y^{(k+1)}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^{(k)}(\tau))\mathrm{d}\tau, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Es ist naheliegend, $y^{(0)} \equiv y_0$ zu wählen.

(a) Bestimmen Sie eine Approximation an die Lösung der Riccati-Differentialgleichung

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \dot{y}(t) = y(t)^2 + t^2, \quad y(0) = 0,$$

indem Sie drei Iterationsschritte durchführen.

(b) Lösen Sie das AWP

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t)y_3(t) \\ -y_2(t)y_3(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mithilfe der Picard-Lindelöf-Iteration. Raten Sie dazu, nachdem Sie ein paar Schritte ausgeführt haben, eine Lösung und zeigen Sie, dass diese Funktion das AWP löst.

Aufgabe 2.4 (Programmieraufgabe)[4 Punkte]
Wir wollen das Anfangswertproblem des Räuber-Beute-Modells numerisch lösen. Sei $y_1(t)$ die Beute- und $y_2(t)$ die Räuberpopulation, $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ und $y(0) = (y_1(0), y_2(0))$ die Werte der Populationen zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Funktion $y(t)$ erfülle die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 y_1 - f_1 y_1 y_2 \\ -r_2 y_2 + f_2 y_1 y_2 \end{pmatrix} =: F(t, y(t)).$$

Indem man die Ableitung durch einen Differenzenquotienten ersetzt,

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \approx \dot{y}(t) = F(t, y(t)), \quad h > 0 \text{ klein},$$

sieht man, wie man aus den Werten $y(t)$ und $F(t, y(t))$ eine Approximation an $y(t+h)$ berechnen kann. Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

`function [y1,y2]=` **RaeuberBeute**`(T,h,y0,r,f)`

die so für die nichtnegativen Parameter $r = [r_1, r_2]$, $f = [f_1, f_2]$ und $y0 = [y_1(0), y_2(0)]$ die Entwicklung der Populationen $y(t)$ bis zu einem Zeitpunkt $T > 0$ approximiert. Unterteilen Sie dazu das Zeitintervall $[0, T]$ äquidistant mit Schrittweite h.

Plotten Sie für die Werte $(T, h, y0, r, f) = (10, 0.0005, [10, 1], [2, 4], [2, 1])$:

(a) ihre Approximation an $y_1(t), y_2(t)$ jeweils als Funktion von t in ein gemeinsames Schaubild,

(b) ihre Approximation an y_2 als Funktion von (Ihrer Approximation an) y_1.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche am 30.04.2019 in der Übung abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll bis zum 30.04.2019 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"DGL2_2019:"**

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.