

## 11. Übungsblatt (erschieden am 25.06.2019)

### Aufgabe 11.1 (schriftliche Aufgabe)[2 Punkte]

Betrachten Sie die partielle Differentialgleichung

$$(x^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u + (y^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = x \frac{\partial}{\partial x} u + y \frac{\partial}{\partial y} u$$

im  $\mathbb{R}^2$ . Wo ist die Gleichung elliptisch, wo hyperbolisch und wo parabolisch?

### Aufgabe 11.2 (schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  offen und beschränkt und seien  $c, f, g \in C(\Omega)$  mit  $c \geq 0$ . Sei  $u \in C^4(\bar{\Omega})$ . Zeigen Sie dass, die Konvergenzaussage in Folgerung 2.12 auch für die (mit den Differenzenquotienten aus Lemma 2.4 und 2.7) erstellte Diskretisierung der Gleichung

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g$$

gilt.

### Aufgabe 11.3 (Votieraufgabe)

Beweisen Sie die Fehlerabschätzungen für die Shortley-Weller-Approximationen in Lemma 2.7.

### Aufgabe 11.4 (Programmieraufgabe)[2+2+1+2 Punkte]

Wir betrachten für  $u : (0, 1) \times (0, 1) \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, t) \mapsto u(x, y, t)$  die 2d-Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u \tag{1}$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$u(0, y, t) = -\cos(y\pi)e^{-10t\pi^2}, \quad u(1, y, t) = \cos(y\pi)e^{-10t\pi^2}, \quad u(x, 0, t) = \cos(3\pi x + 7\pi)e^{-10t\pi^2}, \\ u(x, 1, t) = -\cos(3\pi x + 7\pi)e^{-10t\pi^2}, \quad u(x, y, 0) = \cos(3\pi x + 7\pi) \cos(y\pi).$$

Wir diskretisieren die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten äquidistant durch  $x_i = x_{i-1} + h$ ,  $y_j = y_{j-1} + h$ , für  $i, j = 1, 2, \dots, N + 1$ , wobei  $x_0 = y_0 = 0$  und  $h$  gegeben ist. Weiterhin diskretisieren wir die  $t$ -Koordinate äquidistant zu gegebenem  $\tau$  durch  $t_k = t_{k-1} + \tau$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_t + 1$  mit  $t_0 = 0$ .

Mit  $u_{i,j}^k \approx u(x_i, y_j, t_k)$  ergeben sich also zwei mögliche Iterationsvorschriften

$$\text{(Explizites Euler-Verfahren)} \quad u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{\tau}{h^2} (u_{i+1,j}^k + u_{i,j+1}^k - 4u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j-1}^k)$$

$$\text{(Implizites Euler-Verfahren)} \quad u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{\tau}{h^2} (u_{i+1,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1} - 4u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1})$$

um (beginnend mit  $u_{i,j}^0 = u(x_i, y_j, 0)$ ) aus den Werten  $u_{i,j}^k$  die Werte von  $u_{i,j}^{k+1}$  zu berechnen.

Aufgrund der inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen erhält man jedoch inhomogene lineare Gleichungssysteme

$$U^{k+1} = L_{Exp} U^k + B_{Exp}^k \quad \text{bzw.} \quad L_{Imp} U^{k+1} = U^k + B_{Imp}^k$$

mit  $U^k = (u_{1,1}^k, u_{2,1}^k, \dots, u_{N,1}^k, \dots, u_{1,N}^k, \dots, u_{N,N}^k)^T \in \mathbb{R}^{N^2 \times 1}$  und  $B_{Exp}^k, B_{Imp}^k \in \mathbb{R}^{N^2 \times 1}$ .

(a) Geben Sie  $L_{Exp}$ ,  $L_{Imp}$  und  $B_{Exp}^k, B_{Imp}^k$  an.

(b) Schreiben Sie eine MATLAB Funktion

```
function [u] = Heat2D(u_0yt,u_1yt,u_x0t,u_x1t,u_xy0,h,tau,T,method)
```

zur numerischen Lösung von (1) durch Verwendung des Explizites Euler-Verfahrens (`method=0`) und des Implizites Euler-Verfahrens (`method=1`). Die Funktion soll in `[u]` die diskrete Approximation an  $(t, x, y, u(x, y, t))$  zurückgeben via

$$\mathbf{u}(:, :, \mathbf{tk}) = \begin{pmatrix} u^k(0, 0) & u^k(0, y_1) & \dots & u^k(0, y_N) & u^k(0, y_{N+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u^k(x_i, 0) & u^k(x_i, y_1) & \dots & u^k(x_i, y_N) & u^k(x_i, y_{N+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u^k(x_{N+1}, 0) & u^k(x_{N+1}, y_1) & \dots & u^k(x_{N+1}, y_N) & u^k(x_{N+1}, y_{N+1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+2) \times (N+2)}.$$

(c) Berechnen und visualisieren Sie `[u]` zum Zeitpunkt  $t = T$  für  $T = 0.1, h = 0.01, \tau = 10^{-5}, \tau = 10^{-3}$ , `method=0` sowie `method=1`.

(d) Plotten Sie die Fehlerterme  $\|U_{Exp} - U_{exakt}\|_\infty$  und  $\|U_{Imp} - U_{exakt}\|_\infty$  als Funktion von  $h$  (x-Achse) und  $\tau$  (y-Achse) zum Zeitpunkt  $t = T$  für  $T = 0.2$ , wobei die exakte Lösung gegeben ist durch

$$u(t, x, y) = \cos(3\pi x + 7\pi) \cos(\pi y) e^{-10t\pi^2}.$$

Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit Satz 2.16 in der Vorlesung.

## Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche am 16.07.2019 in der Übung abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben** soll bis zum 16.07.2019 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in MATLAB-Code an ihren Übungsleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit "**DGL11\_2019:**"
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.