

9. Übungsblatt (erschienen am 07.06.2018)

Aufgabe 9.1 (Votieraufgabe)

Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$-w''(x) + b(x)w'(x) = 1, \quad x \in (0, 1), \quad w(0) = w(1) = 0$$

mit $b \in C^2([0, 1])$ eine eindeutige Lösung $w \in C^4([0, 1])$ hat. Substituieren Sie dazu zunächst $v = w'$ und setzen Sie $v(x) = a(x) \exp\left(\int_0^x b(t) dt\right)$ (Variation der Konstanten).

Aufgabe 9.2 (schriftliche Aufgabe)[2+2 Punkte]

Betrachten Sie das Randwertproblem aus Abschnitt 1.8.2 der Vorlesung (leicht vereinfachte Diffusionsgleichung)

$$L[u] = -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1)$$

mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen $u(0) = 0 = u(1)$. Statt ausschließlich zentrale finite Differenzen (FDs) zur Diskretisierung zu verwenden, können z.B. auch einseitige finite Differenzen

$$D_h^+[u](x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \approx u'(x) \quad (\text{rechtsseitige FDs})$$

bzw.

$$D_h^-[u](x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \approx u'(x) \quad (\text{linksseitige FDs})$$

verwendet werden. Ersetzt man nun, ähnlich wie bei der Diskretisierung in Abschnitt 1.8.2, die ersten Ableitungen $u'(x_i)$ auf dem Gitter $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n+1$, $h = 1/(n+1)$ durch die linksseitigen bzw. rechtsseitigen FDs, erhält man die Gleichungssysteme

$$L_h^+ U_h^+ = F \quad \text{bzw.} \quad L_h^- U_h^- = F.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrizen $L_h^+, L_h^- \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(b) Es sei $u \in C^\infty([0, 1])$. Bestimmen Sie $p \in \mathbb{N}$ bzw. $q \in \mathbb{N}$ maximal mit

$$D_h^+[u](x_i) = u'(x_i) + O(h^p) \quad \text{bzw.} \quad D_h^-[u](x_i) = u'(x_i) + O(h^q), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Aufgabe 9.3 (Programmieraufgabe)[1+2+1+1+1 Punkte]

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$L[u] = -u''(x) + bu'(x) = 0, \quad x \in (0, 1)$$

mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen $u(0) = 0, u(1) = 1$ und $0 > b \in \mathbb{R}$. Die Lösung ist gegeben durch

$$u(x) = C_1 e^{bx} + C_2$$

mit $C_1 = -1/(1 - e^b)$ und $C_2 = -C_1$. Für homogene Dirichlet-Randwerte, würde man durch Diskretisieren mit zentralen FDs bzw. unter Verwendung von rechtsseitigen FDs (für $u'(x)$) die linearen Gleichungssysteme

$$L_h U_h = 0 \quad \text{bzw.} \quad L_h^+ U_h^+ = 0$$

mit L_h aus Abschnitt 1.8.2 bzw. L_h^+ aus Aufgabe 9.2 erhalten. Aufgrund der inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen erhält man jedoch inhomogene lineare Gleichungssysteme

$$L_h U_h + B_h = 0 \quad \text{bzw.} \quad L_h^+ U_h^+ + B_h^+ = 0$$

mit $B_h, B_h^+ \in \mathbb{R}^n$ ($h = 1/(1 + n)$).

- (a) Geben Sie L_h, L_h^+ und B_h, B_h^+ an.
- (b) Implementieren Sie die beiden finite Differenzen-Methoden in MATLAB, zur Berechnung von

$$U_h = -L_h^{-1} B_h \quad \text{bzw.} \quad U_h^+ = -L_h^{+^{-1}} B_h^+$$

für $0 < h \in \mathbb{R}$ und $0 > b \in \mathbb{R}$.

- (c) Plotten Sie die Fehlerterme $\|U - U_{h_i}\|_\infty$ und $\|U - U_{h_i}^+\|_\infty$ für $h_i = \frac{1}{2^{i+1}}$, $i = 7, 8, \dots, 13$ und $b = -1$, wobei $U = (u(h), u(2h), \dots, u(1 - h))$ ist (der Rand ist also ausgenommen).
- (d) Machen Sie die gleichen Plots wie in (c) für $b = -10^3$.
- (e) Plotten Sie die Approximationen U_h und U_h^+ zusammen mit der exakten Lösung u für $h = \frac{1}{2^5+1}$ und $b = -10^3$.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 14.06.2018 um 10:00 Uhr in das Fach 42 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Übungsleiter geschickt werden.
- Zu **Programmieraufgaben** soll bis zum 14.06.2018 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in MATLAB-Code an ihren Übungsleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit "**DGL9_2018_Gruppennummer:**" (wenn Sie z.B. in Gruppe 2 sind, so soll die Betreffzeile mit "**DGL9_2018_2:**" beginnen).
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.