GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

8. Übungsblatt (erschienen am 31.05.2018)

Aufgabe 8.1 (schriftliche Aufgabe)[2+2 Punkte]
Zur Berechnung der diskreten Approximation $y_i \approx y(x_i)$, $i \in \mathbb{N}_0$ (mit konstanter Schrittweite $h > 0$ und $x_i = x_0 + ih$) an die Lösung des AWPs

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R},$$

betrachten wir ein Milne-Simpson-Verfahren der Form

$$y_{i+1} = y_{i-1} + h \sum_{j=1}^{m+1} \beta_j f_{i-m+j}, \quad i \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f_{i-m+j} := f(x_{i-m+j}, y_{i-m+j}),$$

wobei $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m+1}$ wie im Abschnitt 1.7.1 der Vorlesung beschrieben gegeben sind.

Im Folgenden setzen wir $m = 2$ und nehmen an, dass die Funktion f des AWPs die Generalvoraussetzung aus Abschnitt 1.4 erfülle.

(a) Zeigen Sie, dass $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1/3, 4/3, 1/3)$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass das Verfahren Konsistenzordnung 4 hat. Beschränken Sie sich dabei auf skalare DGLn $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y'(x) = f(x, y(x))$.

Hinweis: Für $g \in C^4(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei die Simpson-Quadraturformel gegeben durch

$$S[g] = \frac{b-a}{6}\left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)\right) \approx \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Ferner gilt die folgende Fehlerabschätzung: für $h := \frac{b-a}{2}$ existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\left| S[g] - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \right| = \frac{h^5}{90}\left|g^{(4)}(\xi)\right|.$$

Aufgabe 8.2 (Votieraufgabe)

(a) Bestimmen Sie die Formel der BDF-Methode aus Abschnitt 1.7.3 der Vorlesung für $m = 2$.

(b) Zeigen Sie, dass die Adams-Bashforth Methode mit $m = 2$ aus Beispiel 1.40 der Vorlesung die maximale Konsistenzordnung 2 hat. Beschränken Sie sich dabei auf skalare und autonome DGLn $y'(x) = f(y(x))$, wobei f die Generalvoraussetzung aus Abschnitt 1.4 erfülle.

Hinweis: Entwickeln Sie $y_{i-1} = y(x_i - h)$ und $f_{i-1} = f(y(x_i - h))$ um $h = 0$.

Aufgabe 8.3 (Programmieraufgabe)[2+3+4 Punkte]
Im Folgenden sollen Mehrschrittverfahren bzw. linear-implizite Verfahren implementiert werden, die einen Näherungsgraphen `[xi, yi]` (mit konstanter Schrittweite $x_{i+1} - x_i = h > 0$) an den Lösungsgraphen eines AWPs der Form

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x0) = y0 \in \mathbb{R}^d \quad \text{auf} \quad [x0, T]$$

berechnen. Bei den linear-impliziten Verfahren beschränken wir uns dabei auf autonome AWPs. Erstellen Sie für die Verfahren in (a), (b) und (c) jeweils einen Fehlerplot analog zu Teil (b) von Aufgabe 4.5 (dort für RKVs).

(a) Schreiben Sie `MATLAB`-Funktionen

```
function [xi,yi] = linear_impl_Euler(x0,y0,h,f,Jf,T)
```

und

```
function [xi,yi] = linear_impl_midpoint(x0,y0,h,f,Jf,T),
```

die die linear-impliziten Verfahren aus Beispiel 1.37 (a) und (b) implementieren. Dabei soll mit **Jf** die Ableitung $f'(y)$ übergeben werden.

(b) Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

```
function [xi,yi] = Adams_Bashforth(x0,y0,h,f,T),
```

die das Verfahren aus Aufgabe 8.2 (b) implementiert. Verwenden Sie bei der Implementierung das Verfahren von Runge[1], um y_1 für den ersten Schritt des Mehrschrittverfahrens zu berechnen.

(c) (Bonusaufgabe) Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

```
function [xi,yi] = Milne_Simpson(x0,y0,h,f,fy,T,version),
```

die das Verfahren aus Aufgabe 8.1 implementiert. Verwenden Sie bei der Implementierung einmal (für version=1) das RKV aus Aufgabe 5.1 (b) gegeben durch A_1, b_1, c_1 und einmal (für version=2) das Verfahren von Runge, um y_1 für den ersten Schritt des Mehrschrittverfahrens zu berechnen.

Lösen Sie die implizite Gleichung für y_{i+1}, die in der Formel des Mehrschrittverfahrens auftritt, approximativ mit dem Newton-Verfahren. Dazu soll mit **fy** die Ableitung der Funktion $f(x, y)$ nach ihrer y-Komponente übergeben werden.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 07.06.2018 um 10:00 Uhr in das Fach 42 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Übungleiter geschickt werden.

- Zu **Programmieraufgaben** soll bis zum 07.06.2018 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"DGL8_2018_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 2 sind, so soll die Betreffzeile mit "DGL8_2018_2:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

[1]aus Abs. 1.3.4 der Vorlesung