Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

7. Übungsblatt (erschienen am 24.05.2018)

Aufgabe 7.1 (Votieraufgabe)
Sei $R(\zeta) := 1+\zeta b^T(I-\zeta A)^{-1}\mathbb{1} \in \mathbb{C}$ die Stabilitätsfunktion einer allgemeinen Runge-Kutta Methode. Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktionen der folgenden Verfahren: Verfahren von Runge, Verfahren von Heun und implizite Mittelpunktsregel. Plotten Sie das jeweilige Stabilitätsgebiet (Definition 1.31) dieser Methoden in `MATLAB`.

Aufgabe 7.2 (Votieraufgabe)

(a) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion für die Crank-Nicolson-Methode und prüfen Sie, ob die Methode A-stabil, L-stabil oder Isometrie-erhaltend ist.

(b) Beweisen Sie die Aussage aus Bsp. 1.30(c) der Vorlesung: Zeigen Sie, dass die implizite Mittelpunktsregel A-stabil und Isometrie-erhaltend, jedoch nicht L-stabil ist.

(c) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion der zweistufigen Methode in `ode23s` aus Beispiel 1.37 (c).

Aufgabe 7.3 (schriftliche Aufgabe)[5 Punkte]
Betrachten Sie die in Beispiel 1.37 beschriebene dreistufige Methode zur Berechnung von $\hat{y}$ in `ode23s`, angewandt auf das autonome skalare AWP

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y'(x) = f(y(x)), \quad y(0) = y_0.$$

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $k_1 = f + haf'f + h^2a^2f'^2f + O(h^3)$,

(ii) $k_2 = f + h\frac{1}{2}f'f + h^2\left((a-a^2)f'^2f + \frac{1}{8}f''f^2\right) + O(h^3)$,

(iii) $k_3 = f + h(1-a)f'f + h^2\left(\frac{1}{2}f''f^2 + a^2f'^2f\right) + O(h^3)$,

wobei hier die Abkürzungen $f := f(y_0)$, $f' := f'(y_0)$ und $f'' := f''(y_0)$ verwendet werden. Orientieren Sie sich dazu an der Vorgehensweise aus dem Beweis zu Satz 1.39.
Hinweis: Es ist $d_{31} + d_{32} = 2a$ und $\frac{1}{2} - d_{31}a - \frac{1}{2}d_{32} + a = 2a^2$.

(b) Zeigen Sie mithilfe von Teil (a), dass $\hat{y}_1 = y(h) + O(h^4)$ gilt.
Hinweis: Es ist $4a - 2a^2 = 1$.

Aufgabe 7.4 (Programmieraufgabe)[1+3+2 Punkte]
Wir betrachten für $u : (0,1)\times(0,T) \to \mathbb{R} : (x,t) \mapsto u(x,t)$ und $T > 0$ die 1d-Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad u(x,0) \ = g(x). \tag{2}$$

Wir diskretisieren die x-Koordinate mit $N+1$ äquidistanten Gitterpunkten $x_j = x_{j-1} + \Delta x, j = 1,2,\ldots,N$, wobei $x_0 = 0$ ist. Weiterhin approximieren wir die Ableitung 2. Ordnung in (1) durch den zentralen Differenzenquotienten 2. Ordnung, so dass die $u_j := u(x_j,t)$ für $j = 1,\ldots,N-1$ folgende Gleichungen erfüllen müssen:

$$\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta x)^2}.$$

Dieses System von $N-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen kann in Matrixform geschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Au \quad \text{mit} \quad u = (u_1,\ldots,u_{N-1})^T \quad \text{und} \quad A := \frac{1}{(\Delta x)^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}. \tag{3}$$

(a) Erstellen Sie einen Plot des kleinsten negativen Eigenwertes von A über N.
Hinweis: Verwenden Sie `spdiags` um A zu erstellen, sowie `eigs` zur Bestimmung des Eigenwertes.

(b) Schreiben Sie `MATLAB`-Funktionen

```
[t,x,u] = ExpEuler(T,h,Delta_x,g,A),
[t,x,u] = ImpEuler(T,h,Delta_x,g,A),
[t,x,u] = Midpoint(T,h,Delta_x,g,A),
```

zur numerischen Lösung von (2)-(3) durch Verwendung des expliziten Eulerverfahrens, des impliziten Eulerverfahrens und der impliziten Mittelpunktsregel. Die Programme sollen in `[t,x,u]` die diskrete Approximation an den Graphen $(t,x,u(x,t))$ zurückgeben.

(c) Testen Sie ihre Programme aus dem (b)-Teil für $T = 2, \Delta x = 0.05$, A aus (3), $h_1 = 0.001$, $h_2 = 0.0015$, $h_3 = 0.003$, $h_4 = 0.03$ und die Anfangstemperaturverteilung

$$g(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \ \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Plotten Sie ihre Approximationen `[x,u]` des expliziten und impliziten Eulerverfahrens, sowie der impliziten Mittelpunktsregel zum Zeitpunkt $t = 0.03$ für h_1 und h_2.

(ii) Plotten Sie ihre Approximationen `[x,u]` des impliziten Eulerverfahrens und der impliziten Mittelpunktsregel zum Zeitpunkt $t = 0.03$ für h_3 und h_4.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 31.05.2018 um 10:00 Uhr in das Fach 42 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Übungleiter geschickt werden.

- Zu **Programmieraufgaben** soll bis zum 31.05.2018 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"DGL7_2018_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 2 sind, so soll die Betreffzeile mit "DGL7_2018_2:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.