GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

## 4. Übungsblatt (erschienen am 03.05.2018)

**Aufgabe 4.1 (Votieraufgabe)**
Bei den Verfahren aus Abschnitt 1.3.4 handelt es sich um Runge-Kutta Verfahren (RKV). Bestimmen Sie die dazugehörigen Butcher-Tableaus.

**Aufgabe 4.2 (Votieraufgabe)**
Betrachten Sie das nicht autonome d-dimensionale AWP

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(a) = y_0 \in \mathbb{R}^d \tag{1}$$

und das dazugehörige autonome (d+1)-dimensionale AWP

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} Y_1'(x) \\ Y_2'(x) \end{pmatrix} = F(Y(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(Y_1(x), Y_2(x)) \end{pmatrix}, \quad Y(a) = \begin{pmatrix} a \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}. \tag{2}$$

Es seien $y^{(1)} \approx y(a+h_0)$ und $Y^{(1)} \approx Y(a+h_0)$ die Approximationen an die Lösungen der AWPs, die man nach einem Schritt mit einem beliebigen aber festen RKV für die Schrittweite $h_0 > 0$ erhält.

(a) Beweisen Sie, dass AWP (1) und AWP (2) äquivalent sind, d.h. $y(x)$ ist genau dann die Lösung vom AWP (1), wenn $Y(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$ die Lösung vom AWP (2) ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} a+h_0 \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = Y^{(1)}$ gilt.

**Aufgabe 4.3 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]**
Beweisen Sie die folgende Aussage: Hat ein $s$-stufiges RKV (geg. durch $A, b, c$) die Konsistenzordnung $q \in \mathbb{N}$, dann hat die Quadraturformel

$$Q[g] = \sum_{j=1}^{s} b_j g(c_j) \approx \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$$

den Exaktheitsgrad $q-1$. Wie groß kann $q$ maximal sein?
*Hinweis:* Betrachten Sie den ersten Schritt für das AWP $\dot{y}(t) = t^n,\ y(0) = 0,\ 0 \le n < q$.

**Aufgabe 4.4 (Votieraufgabe)**

(a) Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\eta_j = y_i + h_i \sum_{l=1}^{s} a_{jl} f(x_i + c_l h_i, \eta_l), \quad j = 1, \dots, s,$$

aus der ersten Formulierung eines allgemeinen RKVs für ein skalares AWP, d.h. $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\colon (x,y)\mapsto f(x,y)$ ist eine skalare Funktion.

Entwickeln Sie für dieses Gleichungssystem eine möglichst vereinfachte Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens zur Berechnung des Vektors

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_s)^T \in \mathbb{R}^s,$$

wobei $\eta^{(0)} = (y_i, y_i, \ldots, y_i)^T \in \mathbb{R}^s$ der Startvektor dieser Iteration sei.

(b) Lösen Sie Teil (a) für ein allgemeines (nicht notwendigerweise skalares) AWP, d.h. $y'(x) = f(x, y(x))$ mit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ für $d \in \mathbb{N}_0$.

**Aufgabe 4.5 (Programmieraufgabe)[5 Punkte]**
Betrachten Sie ein allgemeines $d$-dimensionales AWP

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^d.$$

(a) Schreiben Sie eine `MATLAB`-funktion

```
function [ti,yi] = expl_Runge_Kutta_Verfahren(t0,y0,h,f,T,A,b,c)
```

welche die diskrete Approximation $[ti, yi]$ eines expliziten RKVs (geg. durch $A = (a_{ij})_{ij=1}^{s}$, $b, c$ mit $a_{ij} = 0$ für $j \geq i$ und konstanter Schrittweite $h_i = h$) an den Lösungsgraphen $(t, y(t))$ mit $t \in [t0, T]$ berechnet. Dabei soll mit dem Parameter f die Funktion $f$ übergeben werden ("function handle"-Konzept in `MATLAB`), welche die DGL des AWPs spezifiziert.

(b) Betrachten Sie das 2-dimensionale AWP

$$\begin{pmatrix}\dot{y}_1(t)\\ \dot{y}_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t)\\ -3y_1(t)\end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix}0.8\\ 0\end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie ihre `MATLAB`-Funktionen aus Teil (a), um mit dem Runge-Kutta-Verfahren von Dormand und Prince (Bemerkung 1.24 der Vorlesung) die Näherung $y_{\text{end}}$ :=`yi(end)`[1] an $y(T)$ mit $T = 1$ für verschiedene Schrittweite $h > 0$ zu berechnen.

Plotten Sie die Norm des Fehlers $y_{\text{end}} - y(T)$ gegen die Schrittweiten $h = 2^{-1}, 2^{-2}, \ldots, 2^{-10}$ in doppeltlogarithmischer Darstellung. Berechnen Sie dazu die exakte Lösung $y(t)$.

# Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 10.05.2018 um 10:00 Uhr in das Fach 42 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Übungleiter geschickt werden.

- Zu **Programmieraufgaben** soll bis zum 10.05.2018 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"DGL4_2018_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 2 sind, so soll die Betreffzeile mit "DGL4_2018_2:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

[1] `yi(end)` ist hier `MATLAB`-Notation und liefert die letzte Komponente von yi