

2. Übungsblatt (erschienen am 19.04.2018)

Aufgabe 2.1 (Votieraufgabe)

Schreiben Sie das Anfangswertproblem (AWP) 3. Ordnung

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y(x), \quad y''' = \sqrt{x^2 + 1}y'' - 12y'y + x - 9, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 17, \quad y''(0) = 0$$

um in ein (äquivalentes) System von Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Aufgabe 2.2 (Votieraufgabe)

(a) Zeigen Sie, dass es zu jedem $C > 0$ eine Funktion φ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$,
- $\varphi(x) = 1, x \in (-\infty, C]$,
- $\varphi(x) = 0, x \in [C + 1, \infty)$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Funktion $e^{-\frac{1}{|x|}}$ beliebig oft differenzierbar ist und alle Ableitungen der Funktion $e^{-\frac{1}{|x|}}$ im Punkt $x = 0$ gleich Null sind.

(b) Ist

$$f : [a, b] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (x, y) \mapsto f(x, y),$$

stetig (in (x, y)) und lokal und bzgl. x glm. Lipschitz stetig in y , so ist die abgeänderte Funktion

$$\tilde{f} : [a, b] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (x, y) \mapsto \tilde{f}(x, y) := f(x, y)\varphi(\|y\|^2)$$

stetig (in (x, y)) und global und bzgl. x glm. Lipschitz stetig in y .

Aufgabe 2.3 (schriftliche Aufgabe)[2+5 Punkte]

Für ein AWP

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

kann man zur Näherung an die analytische Lösung $y(t)$ zum Zeitpunkt t die sogenannte **Picard-Lindelöf-Iteration** verwenden:

$$y^{(k+1)}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y^{(k)}(\tau))d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Es ist naheliegend, $y^{(0)} \equiv y_0$ zu wählen.

(a) Bestimmen Sie eine Approximation an die Lösung der Riccati-Differentialgleichung

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \dot{y}(t) = y(t)^2 + t^2, \quad y(0) = 0,$$

indem Sie drei Iterationsschritte durchführen.

(b) Lösen Sie das AWP

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t)y_3(t) \\ -y_2(t)y_3(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mithilfe der Picard-Lindelöf-Iteration. Raten Sie dazu, nachdem Sie ein paar Schritte ausgeführt haben, eine Lösung und zeigen Sie, dass diese Funktion das AWP löst.

Aufgabe 2.4 (Programmieraufgabe)[4 Punkte]

Wir wollen das Anfangswertproblem des Räuber-Beute-Modells numerisch lösen. Sei $y_1(t)$ die Beute- und $y_2(t)$ die Räuberpopulation, $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ und $y(0) = (y_1(0), y_2(0))$ die Werte der Populationen zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Funktion $y(t)$ erfülle die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 y_1 - f_1 y_1 y_2 \\ -r_2 y_2 + f_2 y_1 y_2 \end{pmatrix} =: F(t, y(t)).$$

Indem man die Ableitung durch einen Differenzenquotienten ersetzt,

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \approx \dot{y}(t) = F(t, y(t)), \quad h > 0 \text{ klein,}$$

sieht man, wie man aus den Werten $y(t)$ und $F(t, y(t))$ eine Approximation an $y(t+h)$ berechnen kann. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [y1,y2]= RaeuberBeute(T,h,y0,r,f)
```

die so für die nichtnegativen Parameter $r = [r_1, r_2]$, $f = [f_1, f_2]$ und $y_0 = [y_1(0), y_2(0)]$ die Entwicklung der Populationen $y(t)$ bis zu einem Zeitpunkt $T > 0$ approximiert. Unterteilen Sie dazu das Zeitintervall $[0, T]$ äquidistant mit Schrittweite h .

Plotten Sie für die Werte $(T, h, y_0, r, f) = (10, 0.0005, [10, 1], [2, 4], [2, 1])$:

- ihre Approximation an $y_1(t), y_2(t)$ jeweils als Funktion von t in ein gemeinsames Schaubild,
- ihre Approximation an y_2 als Funktion von (Ihrer Approximation an) y_1 .

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 26.04.2018 um 10:00 Uhr in das Fach 42 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Übungsleiter geschickt werden.
- Zu **Programmieraufgaben** soll bis zum 26.04.2018 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in MATLAB-Code an ihren Übungsleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit "**DGL2_2018_Gruppennummer:**" (wenn Sie z.B. in Gruppe 2 sind, so soll die Betreffzeile mit "**DGL2_2018_2:**"beginnen).
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.