Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

11. Übungsblatt (erschienen am 21.06.2018)

Aufgabe 11.1 (Schriftliche Aufgabe)[5 Punkte]
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $u \in C^2(\Omega)$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ und $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir definieren $v : M^{-1}(\Omega) \to \mathbb{R}^1$ durch

$$v(\xi) := u(M\xi) \quad \forall \xi \in M^{-1}(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass $v \in C^2(M^{-1}(\Omega))$ und dass

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} v(\xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) \right]_{x=M\xi},$$

wobei a_{ij} die Koeffizienten von $A := MBM^T$ sind.

Aufgabe 11.2 (Votieraufgabe)
Zeigen Sie, dass das Maximumsprinzip in Satz 2.2 für allgemeine elliptische PDGLn der Form

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) = f \leq 0$$

mit (in jedem Punkt $x \in \Omega$) symmetrischer und positiv definiter Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ gilt. Machen Sie sich zuerst klar, warum die Aussage für konstante positiv definite Diagonalmatrizen gilt. Verwenden Sie nun Aufgabe 11.1 um die allgemeine Aussage zu zeigen. Nehmen Sie gegebenfalls A zunächst als konstant (symmetrisch und positiv definit) an.

Aufgabe 11.3 (Votieraufgabe)
Sei $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 1$ oder $n = 2$. Sei $u \in C(\bar{\Omega})^3$. Dann existiert $C > 0$, so dass für $h > 0$ und $h_O, h_W, h_N, h_S \leq h$ (die hinreichend klein seien, so dass die Auswertungen von u definiert sind)

(a) für $n = 1$

$$\left| \frac{2}{h_O(h_O + h_W)} u_O + \frac{2}{h_W(h_O + h_W)} u_W - \frac{2}{h_O h_W} u_Z - u''(x) \right| \leq C |u|_{C(\bar{\Omega})^3} h,$$

wobei $u_Z := u(x), u_W := u(x - h_W)$ und $u_O := u(x + h_O)$.

[1] Wobei hier $M^{-1}(\Omega)$ auch für nicht invertierbare Matrizen einfach das Urbild von Ω unter M (als lineare Abbildung) beschreibt.

(b) für $n = 2$

$$\left| \frac{2}{h_O(h_O + h_W)} u_O + \frac{2}{h_W(h_O + h_W)} u_W + \frac{2}{h_N(h_S + h_N)} u_N \right.$$
$$\left. + \frac{2}{h_S(h_S + h_N)} u_S - \frac{2}{h_O h_W} u_Z - \frac{2}{h_S h_N} u_Z - \Delta u(x) \right| \leq C|u|_{C(\bar{\Omega})^3} h,$$

wobei $u_Z := u(x), u_W := u(x - h_W e_1), u_O := u(x + h_O e_1), u_S := u(x - h_S e_2)$ und $u_N := u(x + h_N e_2)$.

Aufgabe 11.5 (Programmieraufgabe)[2+2+1+2 Punkte]
Im Folgenden befassen wir uns schon einmal numerisch mit einer parabolischen Differentialgleichung. Wir betrachten für $u : (0,1)\times(0,1)\times(0,T) \to \mathbb{R} \,:\, (x,y,t) \mapsto u(x,y,t)$ die 2d-Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u \tag{1}$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$u(0,y,t) = -\cos(y\pi)e^{-10t\pi^2}, \quad u(1,y,t) = \cos(y\pi)e^{-10t\pi^2}, \quad u(x,0,t) = \cos(3\pi x + 7\pi)e^{-10t\pi^2},$$
$$u(x,1,t) = -\cos(3\pi x + 7\pi)e^{-10t\pi^2}, \quad u(x,y,0) = \cos(3\pi x + 7\pi)\cos(y\pi).$$

Wir diskretisieren die x- und y-Koordinaten äquidistant durch $x_i = x_{i-1} + h$, $y_j = y_{j-1} + h$, für $i, j = 1, 2, \ldots, N+1$, wobei $x_0 = y_0 = 0$ und h gegeben ist. Weiterhin diskretisieren wir die t-Koordinate äquidistant zu gegebenem τ durch $t_k = t_{k-1} + \tau, k = 1, 2, \ldots, N_t + 1$ mit $t_0 = 0$.
Mit $u_{i,j}^k \approx u(x_i, y_j, t_k)$ ergeben sich also zwei mögliche Iterationsvorschriften

$$\text{(Explizites Euler-Verfahren)} \qquad u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{\tau}{h^2}(u_{i+1,j}^k + u_{i,j+1}^k - 4u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j-1}^k),$$
$$\text{(Implizites Euler-Verfahren)} \qquad u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{\tau}{h^2}(u_{i+1,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1} - 4u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}),$$

um (beginnend mit $u_{i,j}^0 = u(x_i, y_j, 0)$) aus den Werten $u_{i,j}^k$ die Werte von $u_{i,j}^{k+1}$ zu berechnen.
Aufgrund der inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen erhält man jedoch inhomogene lineare Gleichungssysteme

$$U^{k+1} = L_{Exp} U^k + B_{Exp}^k \quad \text{bzw.} \quad L_{Imp} U^{k+1} = U^k + B_{Imp}^k,$$

mit $U^k = (u_{1,1}^k, u_{2,1}^k, \ldots, u_{N,1}^k, \ldots, u_{1,N}^k, \ldots, u_{N,N}^k)^T \in \mathbb{R}^{N^2 \times 1}$ und $B_{Exp}^k, B_{Imp}^k \in \mathbb{R}^{N^2 \times 1}$.

(a) Geben Sie L_{Exp}, L_{Imp} und B_{Exp}^k, B_{Imp}^k an.

(b) Schreiben Sie eine `MATLAB` Funktion

```
function [u] = Heat2D(u_0yt,u_1yt,u_x0t,u_x1t,u_xy0,h,tau,T,method)
```

zur numerischen Lösung von (1) durch Verwendung des Explitzites Euler-Verfahrens (`method`=0) und des Implizites Euler-Verfahrens (`method`=1). Die Funktion soll in `[u]` die diskrete Approximation an $(t, x, y, u(x,y,t))$ zurückgeben via

$$\texttt{u(:,:,tk)} = \begin{pmatrix} u^k(0,0) & u^k(0,y_1) & \ldots & u^k(0,y_N) & u^k(0,y_{N+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u^k(x_i,0) & u^k(x_i,y_1) & \ldots & u^k(x_i,y_N) & u^k(x_i,y_{N+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u^k(x_{N+1},0) & u^k(x_{N+1},y_1) & \ldots & u^k(x_{N+1},y_N) & u^k(x_{N+1},y_{N+1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+2)\times(N+2)}.$$

(c) Berechnen und visualisieren Sie `[u]` zum Zeitpunkt $t = T$ für $T = 0.1, h = 0.01, \tau = 10^{-5}, \tau = 10^{-3}$, `method`=0 sowie `method`=1.

(d) Plotten Sie die Fehlerterme $\|U_{Exp} - U_{exakt}\|_\infty$ und $\|U_{Imp} - U_{exakt}\|_\infty$ als Funktion von h (x-Achse) und τ (y-Achse) zum Zeitpunkt $t = T$ für $T = 0.2$, wobei die exakte Lösung gegeben ist durch

$$u(t, x, y) = \cos(3\pi x + 7\pi)\cos(\pi y)e^{-10t\pi^2}.$$

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 28.06.2018 um 10:00 Uhr in das Fach 42 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Übungleiter geschickt werden.
- Zu **Programmieraufgaben** soll bis zum 28.06.2018 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"DGL11_2018_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 2 sind, so soll die Betreffzeile mit "DGL11_2018_2:"beginnen).
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.