Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2018
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

10. Übungsblatt (erschienen am 14.06.2018)

Aufgabe 10.1 (schriftliche Aufgabe)[3+1 Punkte]
Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0, \tag{1}$$

auf $(0, 1)$, wobei $b \in C^2([0, 1]), c \in C([0, 1])$ und $c > 0$.

(a) Diskretisieren Sie die Gleichung äquidistant unter Verwendung zentraler, rechts- und linksseitiger Differenzenquotienten (abhängig vom jeweiligen Gitterpunkt gewählt), so dass für die resultierende Matrix L_h gilt: $\|L_h^{-1}\|_\infty \leq C$ für alle $0 < h \leq 1$, wobei $C > 0$ eine Konstante ist. Beachten Sie den Unterschied zu Lemma 1.45.

(b) Wie ist es um die Konsistenz (und Konvergenz) Ihres Verfahrens bestellt?

Aufgabe 10.2 (Votieraufgabe)

(a) Zeigen Sie, dass jede Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ der partiellen Differentialgleichung (PDGL) $u_x = -u_y$ entlang der Kurve $\gamma(t) := \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ konstant ist. Gibt es weitere solche Kurven ($\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ für ein Intervall I) und was bedeutet das für die Menge der Lösungen von $u_x = -u_y$?

(b) Zeigen Sie, dass es jedoch keine nicht trivialen Kurven

$$\gamma : t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))^T \in \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in C^1([0, 1])$$

gibt, auf denen alle Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$ konstant sind.
Hinweis: Eine Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ heißt trivial, falls $\gamma'(t) = (0, 0)$ für alle t. Nutzen Sie einfache, nicht triviale Lösungen der Laplace-Gleichung.

Aufgabe 10.3 (Programmieraufgabe)[3+2+1 Punkte]
Betrachten Sie die PDGL

$$-\Delta u(x, y) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y)\right) =: f(x, y), \quad (x, y)^T \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \tag{2}$$

mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(0, y) = b_1(y),\ u(1, y) = b_2(y),\ u(x, 0) = b_3(x),\ u(x, 1) = b_4(x) \quad \text{für} \quad x, y \in (0, 1).$$

Für $n \in \mathbb{N},\ h = 1/(n + 1)$ ist durch

$$v^{(i+(j-1)n)} := (ih, jh) \in \Omega, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

eine äquidistante Diskretisierung von Ω mit Schrittweite h gegeben.

Ferner sei

$$F := (f^{(k)})_{k=1,\dots,n^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \quad \text{mit} \quad f^{(k)} := f(v^{(k)})$$

und

$$U := (u^{(k)})_{k=1,\dots,n^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \quad \text{mit} \quad u^{(k)} := u(v^{(k)}).$$

Durch Approximation der zweiten Ableitungen mit zentralen FDs in (2) erhält man:

$$\begin{aligned} f^{(k)} &= -\left[\Delta u(v)\right]_{v=v^{(k)}} \approx -D^2_{h,1}[u](v^{(k)}) - D^2_{h,2}[u](v^{(k)}) \\ &= -\frac{1}{h^2}\left(-4u(v^{(k)}) + u(v^{(k)} + he_1) + u(v^{(k)} - he_1) + u(v^{(k)} + he_2) + u(v^{(k)} - he_2)\right), \end{aligned}$$

wobei

$$D^2_{h,i}[u](v) := \frac{u(v+he_i) - 2u(v) + u(v-he_i)}{h^2}, \quad i = 1, 2.$$

Sind neben $v^{(k)}$ auch die Nachbarn $v^{(k)} \pm he_i$ (mit $i = 1, 2$) innere Punkte von Ω, so folgt daraus:

$$f^{(k)} \approx \frac{1}{h^2}\left(4u(v^{(k)}) - u(v^{(k-1)}) - u(v^{(k+1)}) - u(v^{(k-n)}) - u(v^{(k+n)})\right).$$

Ist (mindestens) einer der Nachbarn ein Randpunkt von Ω, so bekommt man einen analogen Ausdruck, bei dem die Dirichlet-Randbedingungen mit einfließen.
Für

$$A_h := \frac{1}{h^2}\left(I_n \otimes T + T \otimes I_n\right), \quad T := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und einen geeigneten Vektor $B_h \in \mathbb{R}^n$ (abhängig von den Dirichlet-Randbed.) gilt damit

$$A_h U + B_h \approx F.$$

Folglich ist $U_h := A_h^{-1}(F - B_h) \in \mathbb{R}^{n^2}$ eine Approximation an U.
Hinweis: Das Kronecker Produkt $K \otimes L \in \mathbb{R}^{lr \times ms}$ zweier Matrizen $K \in \mathbb{R}^{l \times m}$ und $L \in \mathbb{R}^{r \times s}$ wird in Bemerkung 2.6 der Vorlesung definiert.

(a) Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion.

```
function [U_h] = approx_U_h(f,b1,b2,b3,b4,n),
```

die U_h in Abhängigkeit von f, b_1, b_2, b_3, b_4 und $n \in \mathbb{N}$ berechnet. Bestimmen Sie dazu zuerst B_h.

(b) Berechnen und visualisieren Sie U_h für homogene Dirichlet-Randwerte, $n = 50$ und

$$f(x,y) := \begin{cases} 300 & \text{falls} \quad (x,y) \in F_1 \setminus F_2, \\ 240 & \text{falls} \quad (x,y) \in E_1 \cup E_2, \\ 180 & \text{falls} \quad (x,y) \in M, \\ -60 & \text{falls} \quad (x,y) \in F_2 \setminus (E_1 \cup E_2 \cup M), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei

$$\begin{aligned} F_1 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 < 0.35^2\}, \\ F_2 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 < 0.3^2\}, \\ E_1 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-0.4)^2 + (y-0.6)^2 < 0.05^2\}, \\ E_2 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-0.6)^2 + (y-0.6)^2 < 0.05^2\}, \\ M &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0.15^2 < (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 < 0.2^2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < 0.45\}. \end{aligned}$$

(c) Berechnen und visualisieren Sie U_h für $b_1 \equiv b_2 \equiv b_3 \equiv 0$, $b_4(x) = \sin(2\pi x)$, $n = 50$ und $f \equiv 0$.

Hinweis: Mit dem folgenden MATLAB-Code lässt sich U_h geeignet visualisieren:

```
h=1/(n+1);
U_h_matrix=reshape(U_h,n,n)';
[X,Y]=meshgrid(h:h:(1-h),h:h:(1-h));
surf(X,Y,U_h_matrix,'FaceColor','interp','EdgeAlpha',0);
xlabel('x-Achse');
ylabel('y-Achse');
zlabel('u(x,y)');
```

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 21.06.2018 um 10:00 Uhr in das Fach 42 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Übungleiter geschickt werden.

- Zu **Programmieraufgaben** soll bis zum 21.06.2018 um 10:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in MATLAB-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"DGL10_2018_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 2 sind, so soll die Betreffzeile mit "DGL10_2018_2:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.