Lösungsvorschläge zu den zusätzlichen[1] Übungs- und Trainingsvorschläge für die Weihnachtsferien

erstellt von Thomas Fischer (1-11) und Jan Lukas Igelbrink (12),
Mitglieder des Tutorenteams

Aufgabe 1.
Laden Sie eine*n oder zwei Mitstudierende ein, Ihnen eine oder zwei der bisher behandelten Übungsaufgaben (oder Teile von Übungsaufgaben) zu nennen, deren Lösung sie von Ihnen (per E-Mail oder im Gespräch) erklärt bekommen möchten. Erklären Sie die Lösung so verständlich, dass alle Beteiligten einschließlich Sie selbst mit der Erklärung zufrieden sind.

Lösung. Bei der Erklärung sollte mehr Wert auf Verständnis, als auf Kleinigkeiten gelegt werden. Dafür wären auch Aspekte wie "Was haben wir aus der Aufgabe gelernt?", "Welche Zusammenhänge bestehen zu anderen Themen der Vorlesung?" und "Was sind typische Fehler, die bei solchen Aufgaben passieren?" sinnvoll abzuarbeiten.

Aufgabe 2.
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: Für je drei Ereignisse E_1, E_2, E_3 gilt

(a) $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{3} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(E_i) \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

(b) $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{3} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(E_i) \Rightarrow \mathbf{P}(E_i \cap E_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

Lösung. Vorneweg: Bekanntlich gilt: $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{3} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(E_i)$
Falls es hierfür einen Beweis braucht, würde ich dies über die E-A-Formel machen:
$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{3} E_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(E_i) - \sum_{i \neq j} \mathbf{P}(E_i \cap E_j) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(E_i) - \sum_{i \neq j} \Big(\mathbf{P}(E_i \cap E_j) + \frac{1}{3}\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3)\Big)$
Da nun aber $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \subseteq E_i \cap E_j$, lässt sich der hintere Teil abschätzen:
$\leq \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(E_i) - \sum_{i \neq j} \frac{2}{3}\mathbf{P}(E_i \cap E_j) \leq \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(E_i)$
Anhand dieses Beweises sollte die Intuition der Aufgabe bereits klar sein, da wir nur mit den Wahrscheinlichkeiten der E_i arbeiten und uns nicht um Nullmengen kümmern müssen.

(a) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Sei X das Ergebnis eines fairen 01-Münzwurfes und $E_1 = E_2 = E_3 = \{X = 2)$, dann sind alle Wahrscheinlichkeiten 0, aber die Schnitte der Ereignisse sind offensichtlich nicht leer. Analoge Gegenbeispiele gehen mit allen möglichen Nullmengen an Schnitten der E_i.

(b) Die Aussage ist korrekt. Der Beweis folgt direkt aus dem Vorletzten Term des obigen Beweises und der Tatsache, dass $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{3} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(E_i) \Rightarrow \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{3} E_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(E_i)$ nach "Vorneweg:":
$\sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(E_i) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{3} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(E_i) - \sum_{i \neq j} \frac{2}{3}\mathbf{P}(E_i \cap E_j)$
$\Rightarrow \sum_{i \neq j} \frac{2}{3}\mathbf{P}(E_i \cap E_j) \leq 0 \Rightarrow \mathbf{P}(E_i \cap E_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

[1] Die effizienteste Trainingsmethode bleibt nach wie vor das "Verdauen" der Aufgaben auf den regulären Übungsblättern. Vielleicht haben Sie aber darüber hinaus noch Zeit und Lust, sich mit ein paar der netten Aufgaben dieses Blattes auseinanderzusetzen.

Aufgabe 3.
Denken Sie sich ein möglichst einfaches Beispiel eines zufälligen Paares (X_1, X_2) mit X_1 als erster Stufe aus, bei dem X_1 Bernoulli(p) verteilt ist für ein $p \in [0,1]$, die Übergangsverteilung $P(0,\cdot)$ diskret ist und die Übergangsverteilung $P(1,\cdot)$ eine Dichte besitzt. Können Sie das Beispiel so wählen, dass die zweite Stufe X_2

(a) diskret ist?

(b) eine Dichte besitzt?

(c) weder diskret ist noch eine Dichte besitzt?

Lösung. Wähle $P(0,\cdot)$ einfach als Dirac-Verteilung auf der 0 und $P(1,\cdot)$ als uniforme Verteilung auf $[0,1]$ (viel einfacher sollte es nicht gehen). Egal wie man diese wählt, sollten die Antworten auf die Fragen, aber wie folgt lauten:

(a) Ja für $p = 0$

(b) Ja für $p = 1$

(c) Ja für $p \in (0,1)$

Aufgabe 4.
Gegeben sei ein gut gemischtes Kartenblatt bestehend aus 32 Karten, die genau 4 Asse enthalten. Sie ziehen nacheinander alle 32 Karten rein zufällig. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass...

(a) ...die erste gezogene Karte ein Ass ist.

(b) ...die zweite gezogene Karte ein Ass ist.

(c) ...die 20-te gezogene Karte ein Ass ist.

(d) ...die zweite gezogene Karte ein Ass ist, wenn die erste gezogene Karte kein Ass war.

(e) ...die dritte gezogene Karte ein Ass ist, wenn die siebte gezogene Karte ein Ass sein wird.

Lösung. Wenn man sich von der Austauschbarkeit und der uniformen Verteilung des Ziehens überzeugt hat, sollte die Aufgabe kein Problem darstellen:

(a) $\frac{\#Asse}{\#Karten} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

(b) $\frac{1}{8}$

(c) $\frac{1}{8}$

(d) $\frac{\#Asse}{\#Karten} = \frac{4}{31}$

(e) $\frac{3}{31}$ (Hier könnte ein recht schwerer Gedanke sein, dass man auf etwas in der Zukunft bedingt.)

Aufgabe 5.
Berechnen Sie für $n = 1; 10; 200; 2020$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k 3^{n-k}.$$

Lösung. Dies ist eine schöne Anwendung des binomischen Lehrsatzes. Unabhängig von der Wahl von n gilt:
$1 = 1^n = (3-2)^n = ((-2)+3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k 3^{n-k}$

Aufgabe 6.
Interpretieren Sie beide Seiten der folgenden Gleichheit "kombinatorisch" so, dass die Gleichheit auch anschaulich klar wird

$$\binom{n}{1,\ldots,1} = n!\,.$$

Beweisen Sie die Gleichheit auch per Rechnung mittles der Definition des Multinomialkoeffizienten.
Lösung. kombinatorisch: Beide Seiten entsprechen gerade der Anzahl an Möglichkeiten n Plätze ohne Mehrfachbesetzungen mit n unterscheidbaren Objekten zu besetzen.
formal: $\binom{n}{1,\ldots,1} = \frac{n!}{1!\cdot\ldots\cdot 1!} = \frac{n!}{1} = n!$

Aufgabe 7.
Ist ein Ereignis E unabhängig von seinem Komplementärereignis E^c? Begründen Sie Ihre Antwort sowohl formal als auch anschaulich.

Lösung. Anschaulich ist klar, dass E und E^c nicht gleichzeitig eintreten können und somit abhängig seien müssten. Allerdings gibt es hier den Ausnahmefall in dem eines der beiden Ereignisse Wahrscheinlichkeit 0 hat, da das Eintreten von f.s. Ereignissen keinen Erkenntnisgewinn bedeutet.
Formal rechnet sich dies wie folgt:
$\mathbf{P}(E \cap E^c) = \mathbf{P}(E)\,\mathbf{P}(E^c) \Leftrightarrow 0 = \mathbf{P}(E)\,\mathbf{P}(E^c) \Leftrightarrow \mathbf{P}(E) = 0 \vee \mathbf{P}(E^c) = 0$

Aufgabe 8.
X sei die Augenzahl beim gewöhnlichen (fairen) Würfeln. Wie ist X verteilt unter der Bedingung ...

(a) $X > 3$?

(b) X^2 ist eine Quadratzahl?

(c) $\pi - 2 \leq X \leq \pi^2$?

Lösung.

(a) uniform auf $\{4, 5, 6\}$

(b) uniform auf $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (X^2 ist immer eine Quadratzahl)

(c) uniform auf $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ ($\pi - 2 = 1.1416$; $\pi^2 = 9.8696$)

Aufgabe 9.
In einem zweistufigen Zufallsexperiment sei U uniform verteilt auf $\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$, und X sei eine Zufallsvariable mit $\mathbf{P}(X = 1|U) = U$ und $\mathbf{P}(X = 0|U) = 1 - U$. Bestimmen Sie die Verteilungsgewichte von X und nennen Sie die Verteilung von X beim Namen.

Lösung. Da X offensichtlich nur die Ausgänge 0 und 1 hat, ist direkt klar, dass X Bernoulli(p)-verteilt ist und wir nur noch p bestimmen müssen. Dies sollte am saubersten dadurch gehen, dass wir wissen, dass $\mathbf{E}[X] = p$ ist:
$p = \mathbf{E}[X] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[X|U]\right] = \mathbf{E}[U] = \frac{0+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1}{6} \overset{TR}{=} \frac{137}{360} = 0.380\overline{5}$

Aufgabe 10.
X_1 und X_2 seien zwei unabhängige Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + X_2$ für X_1 und X_2

(a) Bernoulli(p)-verteilt,

(b) standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}^1$,

(c) uniform auf $[0, 1]$ verteilt,

Nennen Sie bei a) und b) die Verteilung beim Namen, und geben Sie bei c) die Dichte der Verteilung an.

Lösung.

(a) $Bin(2,p)$-verteilt (bekannt aus VL2b Folien 31 bis 37)

(b) $N(0,2)$-verteilt (bekannt aus VL6b Folie 56ff)

(c) Dies lässt sich gut entweder über Faltung berechnen oder über den Querschnitt des Einheitsquadrates einsehen. Ich nehme die Faltung:
$f_{X_1+X_2}(u) = f_1 * f_2(u) = \int_0^1 f_1(u-v) \cdot f_2(v)dv$

$$= \int_0^1 1_{\{u-v\in[0,1]\}}dv = \int_0^1 1_{\{v\in[u-1,u]\}}dv = \int_{0\vee(u-1)}^{u\wedge 1} 1dv = \begin{cases} u & ; u \in [0,1] \\ 2-u & ; u \in [0,1] \\ 0 & ; sonst \end{cases}$$

Aufgabe 11.
[2]

Auf dem Übungsblatt 10, welches Sie über die Winterpause bearbeiten sollen, befinden sich die 5 Aufgaben 37, 38, 39 40 und Z.
Angenommen Sie würden sich für die letzte Ferienwoche in einer 5-köpfigen Lerngruppe verabreden, um die Aufgaben gemeinsam durchzugehen. Sie verabreden, dass jeder von Ihnen hierfür genau 2 der 5 Aufgaben vorbereiten soll, um diese den anderen erklären zu können. Leider vergessen Sie vorher abzusprechen, wer welche Aufgaben übernehmen soll.
Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass jedes Mitglied Ihrer Lerngruppe unabhängig von den anderen sich rein zufällig 2 der 5 Aufgaben auswählt, um diese vorzubereiten.
Beantworten Sie die folgenden Fragen:

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird jede der 5 Aufgaben von mindestens einem Mitglied Ihrer Lerngruppe vorbereitet?

(b) Wie viele Aufgaben müsste jede Person mindestens vorbereiten, damit die Wahrscheinlichkeit, dass jede der Aufgaben von mindestens einem Mitglied vorbereitet wird, mindestens 0.9 beträgt?

Tipps:
-Warum können Sie "Anzahl *Günstige* durch Anzahl *Mögliche*" benutzen? Wie könnte dies helfen?
-Nennen wir die Mitglieder der Lerngruppe A,B,C,D und E.
-Wie viele Möglichkeiten hat jedes einzelne Mitglied, 2 der 5 Aufgaben auszuwählen?
-Wie viele mögliche Konstellationen gibt es insgesamt für die von A,B,C,D und E ausgewählten Aufgaben?
-Bei wie vielen dieser Konstellationen bereitet niemand Aufgabe Z vor?
-Bei wie vielen Konstellationen wird weder Aufgabe 38 noch 40 vorbereitet? (Macht es einen Unterschied, welche Aufgaben sie betrachten, solange es genau zwei sind?)
-Können Sie diesen Gedanken so weiterspinnen, dass Sie die Einschluss-Ausschluss-Formel anwenden können?

Lösung.

(a) Es lässt sich $\frac{\#gü.}{\#mö.}$ verwenden, da jede konkrete Konstellation die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, da es sich um eine rein zufällige Wahl handelt.
Für die Anzahl an Möglichen ergibt sich aufgrund der 5-fachen unabhängigen Wahl von 2 aus 5: $\binom{5}{2}^5 \overset{TR}{=} 100000$
Für die Anzahl an Günstigen per Einschluss-Ausschlussformel brauche ich die Anzahl Möglichkeiten eine/zwei/drei fixe Aufgaben als Gruppe nicht abzudecken (der Fall vier fixe Aufgabe nicht

[2]für alle, die gerne rechnen und/oder die Einschluss-Ausschluss-Formel üben wollen

abzudecken ist offensichtlich nicht möglich):
eine fixe Aufgabe nicht abzudecken (jeder wählt 2 der anderen 4): $\binom{4}{2}^5$
zwei fixe Aufgaben nicht abzudecken (jeder wählt 2 der anderen 3): $\binom{3}{2}^5$
drei fixe Aufgaben nicht abzudecken (jeder wählt 2 der anderen 2): $\binom{2}{2}^5$
Nun kann man die obigen Fälle aus Symmetrie zusammenfassen (es gibt $\binom{5}{1}$ Möglichkeiten eine fixe Aufgabe auszuwählen, $\binom{5}{2}$ für zwei und $\binom{5}{3}$ für drei). Damit ergibt sich für die Anzahl an Günstigen per EA-Formel:
$\binom{5}{2}^5 - \binom{5}{1}\binom{4}{2}^5 + \binom{5}{2}\binom{3}{2}^5 - \binom{5}{3}\binom{2}{2}^5 = 10^5 - 5 \cdot 6^5 + 10 \cdot 3^5 - 10 \cdot 1^5 \overset{TR}{=} 63540$
Somit ist die gefragte Wahrscheinlichkeit: $\frac{63540}{100000} = 0.6354$

(b) Bereits bei 3 von 5 vorbereiteten Aufgaben ist dies erfüllt:
Ich gehe hier wieder analog zu (a) vor, nur dass es diesmal nicht möglich ist drei fixe Aufgaben nicht abzudecken:
Anzahl an Möglichen: $\binom{5}{3}^5 \overset{TR}{=} 100000$
Anzahl an Günstigen: $\binom{5}{3}^5 - \binom{5}{1}\binom{4}{3}^5 + \binom{5}{2}\binom{3}{3}^5 = 10^5 - 5 \cdot 4^5 + 10 \cdot 1^5 \overset{TR}{=} 94890$
Wahrscheinlichkeit: $\frac{94890}{100000} = 0.9489$

Für den Fall das es jemanden interessieren sollte. Hier stehen die restlichen Wahrscheinlichkeiten:

0 von 5 Aufgaben vorbereiten:
Hier ist es offensichtlich unmöglich, dass alle Aufgaben vorbereitet sind. Demzufolge ist die Wahrscheinlichkeit 0.

1 von 5 Aufgaben vorbereiten:
Hier sind genau dann alle Aufgaben vorbereitet, wenn jeder eine andere Aufgabe vorbereitet. Demzufolge lässt es sich als die Wahrscheinlichkeit, dass es zu keiner Kollision kommt, wenn man 5 mal mit Zurücklegen aus einer 5-elementigen Menge zieht:
$\frac{5!}{5^5} \overset{TR}{=} \frac{24}{625} = 0.0384$

4 von 5 Aufgaben vorbereiten:
Betrachtet man das Gegenereignis davon, dass alle Aufgaben vorbereitet werden, dann fällt auf, dass dies gerade der Fall ist, wenn alle 5 die selben 4 Aufgaben vorbereiten, also die selbe Aufgabe nicht vorbereiten (es gibt 5 Möglichkeiten diese Aufgabe auszuwählen). Damit ergibt das folgende Rechnung:
$1 - \frac{5}{\binom{5}{4}^5} = 1 - \frac{1}{5^4} \overset{TR}{=} \frac{624}{625} = 0.9984$

5 von 5 Aufgaben vorbereiten:
Hier hat jeder alle Aufgaben vorbereiten, also ist die Wahrscheinlichkeit offensichtlich 1.

Aufgabe 12.
Wenn man den Auftrag hat, den Erwartungswert einer reellwertigen Zufallsvariablen $Y = h(Z)$ zu berechnen, könnte man versucht sein, erst die Verteilung von $h(Z)$ (durch Auffinden ihrer Verteilungsgewichte bzw. ihrer Dichte) zu bestimmen und dann den Erwartungswert nach den Buchstaben des Gesetzes zu berechnen. Oft führt ein direkterer Weg schneller und bequemer zum Ziel, trotzdem mag es aufschlussreich sein, sich wenigstens ein oder zweimal im Leben (zum Beispiel bei der hier gestellten Aufgabe) zu vergewissern, dass die Wege zum selben Ziel führen:

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert von Y aus Übung 6, Aufgabe 21 mittels
i) der Linearität des Erwartungswertes,
ii) der diskreten Transformationsformel $\mathbf{E}[h(Z)] = \sum_a h(a)\mathbf{P}(Z = a)$,
iii) der in A21 ermittelten Verteilungsgewichte von Y.

(b) Z sei Exp(1)-verteilt, $Y := e^{-2Z}$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von Y
i) mittels der kontinuierlichen Transformationsformel $\mathbf{E}[h(Z)] = \int h(a)f_Z(a)da$

ii) indem Sie erst die Verteilungsfunktion F_Y und die Dichte f_Y von Y ermitteln und dann die Formel $\mathbf{E}[Y]) = \int b f_Y(b) db$ verwenden.

Lösung.

(a) (i) Unter Vewerndung von $\mathbf{E}[Z_i] = \frac{1}{4}$ erhält man

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{2}Z_1 + \frac{1}{4}Z_2 + \frac{1}{8}Z_3\right] \overset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{2}\mathbf{E}[Z_1] + \frac{1}{4}\mathbf{E}[Z_2] + \frac{1}{8}\mathbf{E}[Z_3] = \frac{7}{32}.$$

(ii) Die diskrete Transofmrationsformel liefert für $h(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{4}z_2 + \frac{1}{8}z_3$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y] &= \mathbf{E}[h(Z)] \\
&= \sum_{a=(a_1,a_2,a_3)\in\{0,1\}^3} \mathbf{P}(Z_1 = a_1, Z_2 = a_2, Z_3 = a_3) \cdot h(a_1, a_2, a_3) \\
&= \mathbf{P}(Z_1 = 0, Z_2 = 0, Z_3 = 0) \cdot h(0,0,0) + \mathbf{P}(Z_1 = 0, Z_2 = 0, Z_3 = 1) \cdot h(0,0,1) \\
&\quad + \mathbf{P}(Z_1 = 0, Z_2 = 1, Z_3 = 0) \cdot h(0,1,0) + \mathbf{P}(Z_1 = 0, Z_2 = 1, Z_3 = 1) \cdot h(0,1,1) \\
&\quad + \mathbf{P}(Z_1 = 1, Z_2 = 0, Z_3 = 0) \cdot h(1,0,0) + \mathbf{P}(Z_1 = 1, Z_2 = 0, Z_3 = 1) \cdot h(1,0,1) \\
&\quad + \mathbf{P}(Z_1 = 1, Z_2 = 1, Z_3 = 0) \cdot h(1,1,0) + \mathbf{P}(Z_1 = 1, Z_2 = 1, Z_3 = 1) \cdot h(1,1,1) \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{0}{8} + \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{2}{8} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot \frac{3}{8} \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{4}{8} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot \frac{5}{8} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot \frac{6}{8} + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot \frac{7}{8} \\
&= \frac{7}{32}.
\end{aligned}$$

(iii) Da $h : \{0,1\}^3 \to \mathbb{R}$ injektiv ist, ist die Rechnung identisch.

(b) (i) Z besitzt die Dichte $f_Z(a)\,\mathrm{d}a = e^{-a}\,\mathrm{d}a$, damit folgt für $h(z) := e^{-2z}$

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[h(Z)] = \int_0^\infty e^{-2a} e^{-a}\,\mathrm{d}a = \int_0^\infty e^{-3a}\,\mathrm{d}a = \frac{1}{3}.$$

(ii) Es gilt für $0 \le a \le 1$

$$F_Y(a) = \mathbf{P}(Y \le a) = \mathbf{P}\left(e^{-2Z} \le a\right) = \mathbf{P}(-2Z \le \ln(a)) = \mathbf{P}\left(Z \ge -\frac{\ln(a)}{2}\right) = e^{\frac{\ln(a)}{2}} = \sqrt{a},$$

womit wir die Dichte

$$f_Y(a)\,\mathrm{d}a = \frac{1}{2\sqrt{a}}\,\mathrm{d}a \text{ für } 0 \le a \le 1$$

erhalten. Das liefert

$$\mathbf{E}[Y] = \int_0^1 a f_Y(a)\,\mathrm{d}a = \int_0^1 a \frac{1}{2\sqrt{a}}\,\mathrm{d}a = \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{a} = \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \left[\frac{1}{3} a^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$