

Zusätzliche¹ Übungs- und Trainingsvorschläge für die Weihnachtsferien

angeregt und ausgedacht von Thomas Fischer (1-11) und Jan Lukas Igelbrink (12),
Mitglieder des Tutorentams

Aufgabe 1.

Laden Sie eine*n oder zwei Mitstudierende ein, Ihnen eine oder zwei der bisher behandelten Übungsaufgaben (oder Teile von Übungsaufgaben) zu nennen, deren Lösung sie von Ihnen (per E-Mail oder im Gespräch) erklärt bekommen möchten. Erklären Sie die Lösung so verständlich, dass alle Beteiligten einschließlich Sie selbst mit der Erklärung zufrieden sind.

Aufgabe 2.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: Für je drei Ereignisse E_1, E_2, E_3 gilt

$$(a) \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^3 E_i\right) \geq \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}(E_i) \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$(b) \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^3 E_i\right) \geq \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}(E_i) \Rightarrow \mathbf{P}(E_i \cap E_j) = 0 \quad \forall i \neq j$$

Aufgabe 3.

Denken Sie sich ein möglichst einfaches Beispiel eines zufälligen Paares (X_1, X_2) mit X_1 als erster Stufe aus, bei dem X_1 Bernoulli(p) verteilt ist für ein $p \in [0, 1]$, die Übergangsverteilung $P(0, \cdot)$ diskret ist und die Übergangsverteilung $P(1, \cdot)$ eine Dichte besitzt. Können Sie das Beispiel so wählen, dass die zweite Stufe X_2

(a) diskret ist?

(b) eine Dichte besitzt?

(c) weder diskret ist noch eine Dichte besitzt?

Aufgabe 4.

Gegeben sei ein gut gemischtes Kartenblatt bestehend aus 32 Karten, die genau 4 Assen enthalten. Sie ziehen nacheinander alle 32 Karten rein zufällig. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass...

(a) ...die erste gezogene Karte ein Ass ist.

(b) ...die zweite gezogene Karte ein Ass ist.

(c) ...die 20-te gezogene Karte ein Ass ist.

(d) ...die zweite gezogene Karte ein Ass ist, wenn die erste gezogene Karte kein Ass war.

(e) ...die dritte gezogene Karte ein Ass ist, wenn die siebte gezogene Karte ein Ass sein wird.

Aufgabe 5.

Berechnen Sie für $n = 1; 10; 200; 2020$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k 3^{n-k}.$$

¹Die effizienteste Trainingsmethode bleibt nach wie vor das "Verdauen" der Aufgaben auf den regulären Übungsblättern. Vielleicht haben Sie aber darüber hinaus noch Zeit und Lust, sich mit ein paar der netten Aufgaben dieses Blattes auseinanderzusetzen.

Aufgabe 6.

Interpretieren Sie beide Seiten der folgenden Gleichheit “kombinatorisch” so, dass die Gleichheit auch anschaulich klar wird

$$\binom{n}{1, \dots, 1} = n!.$$

Beweisen Sie die Gleichheit auch per Rechnung mittels der Definition des Multinomialkoeffizienten.

Aufgabe 7.

Ist ein Ereignis E unabhängig von seinem Komplementärereignis E^c ? Begründen Sie Ihre Antwort sowohl formal als auch anschaulich.

Aufgabe 8.

X sei die Augenzahl beim gewöhnlichen (fairen) Würfeln. Wie ist X verteilt unter der Bedingung ...

- (a) $X > 3$?
- (b) X^2 ist eine Quadratzahl?
- (c) $\pi - 2 \leq X \leq \pi^2$?

Aufgabe 9.

In einem zweistufigen Zufallsexperiment sei U uniform verteilt auf $\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$, und X sei eine Zufallsvariable mit $\mathbf{P}(X = 1|U) = U$ und $\mathbf{P}(X = 0|U) = 1 - U$. Bestimmen Sie die Verteilungsgewichte von X und nennen Sie die Verteilung von X beim Namen.

Aufgabe 10.

X_1 und X_2 seien zwei unabhängige Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + X_2$ für X_1 und X_2

- (a) Bernoulli(p)-verteilt,
- (b) standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}^1$,
- (c) uniform auf $[0, 1]$ verteilt,

Nennen Sie bei a) und b) die Verteilung beim Namen, und geben Sie bei c) die Dichte der Verteilung an.

Aufgabe 11. ²

Auf dem Übungsblatt 10, welches Sie über die Winterpause bearbeiten sollen, befinden sich die 5 Aufgaben 37, 38, 39 40 und Z.

Angenommen Sie würden sich für die letzte Ferienwoche in einer 5-köpfigen Lerngruppe verabreden, um die Aufgaben gemeinsam durchzugehen. Sie verabreden, dass jeder von Ihnen hierfür genau 2 der 5 Aufgaben vorbereiten soll, um diese den anderen erklären zu können. Leider vergessen Sie vorher abzusprechen, wer welche Aufgaben übernehmen soll.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass jedes Mitglied Ihrer Lerngruppe unabhängig von den anderen sich rein zufällig 2 der 5 Aufgaben auswählt, um diese vorzubereiten.

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird jede der 5 Aufgaben von mindestens einem Mitglied Ihrer Lerngruppe vorbereitet?
- (b) Wie viele Aufgaben müsste jede Person mindestens vorbereiten, damit die Wahrscheinlichkeit, dass jede der Aufgaben von mindestens einem Mitglied vorbereitet wird, mindestens 0.9 beträgt?

²für alle, die gerne rechnen und/oder die Einschluss-Ausschluss-Formel üben wollen

Tipps:

- Warum können Sie “Anzahl *Günstige* durch Anzahl *Mögliche*” benutzen? Wie könnte dies helfen?
- Nennen wir die Mitglieder der Lerngruppe A,B,C,D und E.
- Wie viele Möglichkeiten hat jedes einzelne Mitglied, 2 der 5 Aufgaben auszuwählen?
- Wie viele mögliche Konstellationen gibt es insgesamt für die von A,B,C,D und E ausgewählten Aufgaben?
- Bei wie vielen dieser Konstellationen bereitet niemand Aufgabe Z vor?
- Bei wie vielen Konstellationen wird weder Aufgabe 38 noch 40 vorbereitet? (Macht es einen Unterschied, welche Aufgaben sie betrachten, solange es genau zwei sind?)
- Können Sie diesen Gedanken so weiterspinnen, dass Sie die Einschluss-Ausschluss-Formel anwenden können?

Aufgabe 12. Wenn man den Auftrag hat, den Erwartungswert einer reellwertigen Zufallsvariablen $Y = h(Z)$ zu berechnen, könnte man versucht sein, erst die Verteilung von $h(Z)$ (durch Auffinden ihrer Verteilungsgewichte bzw. ihrer Dichte) zu bestimmen und dann den Erwartungswert nach den Buchstaben des Gesetzes zu berechnen. Oft führt ein direkterer Weg schneller und bequemer zum Ziel, trotzdem mag es aufschlussreich sein, sich wenigstens ein oder zweimal im Leben (zum Beispiel bei der hier gestellten Aufgabe) zu vergewissern, dass die Wege zum selben Ziel führen:

- (a) Bestimmen Sie den Erwartungswert von Y aus Übung 6, Aufgabe 21 mittels
 - i) der Linearität des Erwartungswertes,
 - ii) der diskreten Transformationsformel $\mathbf{E}[h(Z)] = \sum_a h(a)\mathbf{P}(Z = a)$,
 - iii) der in A21 ermittelten Verteilungsgewichte von Y .
- (b) Z sei $\text{Exp}(1)$ -verteilt, $Y := e^{-2Z}$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von Y
 - i) mittels der kontinuierlichen Transformationsformel $\mathbf{E}[h(Z)] = \int h(a)f_Z(a)da$
 - ii) indem Sie erst die Verteilungsfunktion F_Y und die Dichte f_Y von Y ermitteln und dann die Formel $\mathbf{E}[Y] = \int bf_Y(b)db$ verwenden.