Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 21. Dezember 2019, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS) oder bis zu diesem Termin direkt an Ihre Tutorin/Ihren Tutor, z. B. über die Kästen in der RM6, 3. Stock

Geben Sie kurze und treffende Begründungen für Ihre Ergebnisse!

33. S. ***Diskret und kontinuierlich - diesmal gemischt.*** Die Verteilungsfunktion F der reellwertigen Zufallsvariablen Y habe die folgenden Eigenschaften (i)-(iii):
(i) $F(0) = 0$, $F(5) = 0.7$, $F(8) = 0.8, F(10) = 1$.
(ii) Auf jedem der Intervalle $(0, 5)$, $(5, 8)$ und $(8, 10)$ hat F konstante Steigung.
(iii) F hat an der Stelle 5 einen Sprung der Höhe 0.3, ansonsten hat F keine Sprünge.

a) Skizzieren Sie F.
b) Wir fassen jetzt Y als Ergebnis der zweiten Stufe eines zweistufigen Zufallsexperimentes auf, in dem wir in der ersten Stufe entscheiden, ob die einelementige Menge $\{5\}$ zum Zug kommt oder eines der drei angegebenen Intervalle. Beschreiben Sie die Verteilungsgewichte der ersten Stufe, sowie für jeden der 4 Ausgänge der ersten Stufe die Übergangsverteilung.
c) Berechnen Sie den Erwartungswert von Y.

34. ***Box-Muller Verfahren.*** Mir wurde von den Tutoren berichtet, dass einige von Ihnen gerne ein ähnlich hübsches Verfahren zur Erzeugung einer standard-normalverteilten Zufallsvariablen sehen würden, wie wir das für eine Exp(1)-verteilte Zufallsvariable kennengelernt haben (nämlich $T := -\ln U$, mit U uniform auf $[0, 1]$). Über diese Neugierde habe ich mich gefreut.
Was halten Sie von folgendem Verfahren: U und V seien unabhängige auf $[0, 1]$ uniform verteilte Zufallsvariable. Erzeuge einen zufälligen Punkt $\vec{Z} = (Z_1, Z_2)$ in $\mathbb{R}^2$ so: Als Abstand R des Punktes $\vec{Z}$ vom Ursprung nimm $\sqrt{-2\ln U}$, und als seinen *Winkel* Θ (im Bogenmaß) nimm $2\pi V$ (damit ist $\vec{Z}$ rotationssymmetrisch verteilt). Stellen Sie sich vor, Ihr Opa oder Ihre Chefin ist Hobby-Stochastiker*in und hat Aufgabe 28 schon verstanden. Wie können Sie ihn/sie überzeugen, dass
(i) Z_1 und Z_2 unabhängig und $N(0, 1)$-verteilt sind,
(ii) die Zufallsvariable $\sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V)$ standard-normalverteilt ist?

Bei Ihrer Überzeugungsarbeit dürfen Sie sich auf folgendes Argument stützen: *Jede rotationssymmetrische Verteilung auf* $\mathbb{R}^2$ *eintsteht auf zweistufige Weise so: Wähle in der ersten Stufe einen zufälligen Radius, d.h. Abstand vom Ursprung. Gegeben den Ausgang der ersten Stufe, wähle den Winkel (im Bogenmaß) uniform verteilt auf* $[0, 2\pi)$. *Insbesondere ist also jede rotationssymmetrische Verteilung auf* $\mathbb{R}^2$ *durch die Verteilung des zufälligen Radius bestimmt.*

35. S. ***Zweistufigkeit hin und zurück.*** Das zufällige Paar (X_1, X_2) mit Werten in $\{1, 2, 3\} \times \{b, c, d\}$ komme durch ein zweistufiges Experiment zustande, wobei die Verteilung von X_1 uniform sei und die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(a_1, .)$, $a_1 \in \{1, 2, 3\}$, durch die rechts angegebene Matrix bestimmt sind.

	b	c	d
1	0	0.5	0.5
2	0.3	0.2	0.5
3	0.6	0.3	0.1

(i) Finden Sie die Matrix der gemeinsamen Verteilungsgewichte von (X_1, X_2) und die Verteilungsgewichte von X_2.

(ii) Finden Sie Übergangswahrscheinlichkeiten $Q(a_2, .)$, $a_2 \in \{b, c, d\}$ so, dass das zufällige Paar (X_2, X_1) als zweistufiges Zufallsexperiment, jetzt mit X_2 als erster Stufe, entsteht.

(iii) Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert von X_1 gegeben $X_2 = b$.

36. ***Erwartete Suchtiefe.*** 15 Namen sind in 5 Listen einsortiert. Die Längen $Z_1, \dots, Z_5$ der Listen sind identisch verteilt und haben Varianz 16. Die Suchtiefen der in Liste j einsortierten Namen sind $0, 1, \dots, Z_j - 1$.
a) Finden Sie $\mathbf{E}[Z_j]$.
b) Aus den 15 Namen wird rein zufällig einer gewählt. Berechnen Sie den Erwartungswert seiner Suchtiefe.