Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 6. Dezember 2019, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS) oder bis zu diesem Termin direkt an Ihre Tutorin/Ihren Tutor, z. B. über die Kästen in der RM6, 3. Stock

Geben Sie kurze und treffende Begründungen für Ihre Ergebnisse!

25. S. (X_1, X_2) ist das Koordinatenpaar eines auf $S \subset \mathbb{R}^2$ uniform verteilten Punktes. Sind X_1 und X_2

(i) unkorreliert (ii) unabhängig

für

a) $S := [-1, 1] \times [0, 1]$, b) $S := ([-1, 0] \times [-1, 0]) \cup ([0, 1] \times [0, 1])$,
c) $S := \{(a_1, a_2) : a_1^2 + a_2^2 \leq 1, a_1 \geq 0\}$?

26. a) Berechnen Sie, gerundet auf 2 Nachkommastellen, die Zahl c jeweils so, dass eine normalverteilte Zufallsvariable Y mit Wahrscheinlichkeit
(i) 0.01 (ii) 0.001
außerhalb ihrer $c\sigma_Y$-Grenzen fällt.
(Zur Erinnerung: In R bekommt man die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung als $\Phi(b) = \texttt{pnorm}(b)$ und die zugehörige *Quantilfunktion* als $\Phi^{-1}(p) = \texttt{qnorm}(p)$.)
b) Y sei eine reellwertige Zufallsvariable mit Erwartungswert μ, und d sei eine positive Zahl. Sind die beiden Ereignisse “Y hat von seinem Erwartungswert einen Abstand $\leq d$” und “Das zufällige Intervall $I := [Y - d, Y + d]$ überdeckt die Zahl μ” gleich?
c) Y sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit Varianz 16 und unbekanntem Erwartungswert μ. Geben Sie ein zufälliges Intervall I and, welches μ mit Wahrscheinlichhkeit
(i) 0.99 (ii) 0.999
überdeckt.

27 S. a) Es sei B eine $\text{Bin}(n, 0.9)$-verteilte Zufallsvariable. Was ist das maximale n, für welches die Wahrscheinlichkeit, dass B den Wert 100 überschreitet, noch unter 0.025 bleibt? Beantworten Sie die Frage
i) unter Verwendung der R-Befehle `pbinom` und/oder `qbinom`
ii) durch Auffinden des maximalen n, für welches $n \cdot 0.9 + 1.96\sqrt{n \cdot 0.9 \cdot 0.1} < 100 + \frac{1}{2}$ gilt.
iii) Wie kommt das Rezept in ii) mittels der Normalapproximation der Binomialverteilung zustande? Eine Skizze ist hilfreich.
b) Es sei bekannt, dass jede einzelne bis zum Tag x angenommene Buchung eines Fluges mit Wahrscheinlichkeit 0.1 nach dem Tag x storniert wird. Wieviele Buchungen dürfen für diesen Flug bis zum Tag x höchstens angenommen werden, wenn bei 100 Plätzen im Flugzeug alle gebuchten Passagiere mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.975 Platz finden sollen?

28. X und Y seien zwei auf $\mathbb{R}$ standard-normalverteilte Zufallsvariable, und V sei der zufällige Punkt in $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten X und Y.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $T := X^2 + Y^2$.

b) Sind (für $b > 0$) die beiden Ereignisse $\{T > b\}$ und “V fällt nicht in die Kreisscheibe $K := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq b\}$” gleich?

c) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass X und Y unabhängig sind. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(T > b)$. Dabei dürfen Sie folgende Gleichheit verwenden:

$$\int_K e^{-(x^2+y^2)/2} dx\, dy = \int_0^{\sqrt{b}} e^{-r^2/2}\, 2\pi r\, dr.$$

d) Wie ist das Quadrat des Abstands vom Ursprung eines auf $\mathbb{R}^2$ standard-normalverteilten Punktes verteilt?