Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik"

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 29. November 2019, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS) oder bis zu diesem Termin direkt an Ihre Tutorin/Ihren Tutor, z. B. über die Kästen in der RM6, 3. Stock

Geben Sie kurze und treffende Begründungen für Ihre Ergebnisse!

21. S. *Münzwurffolgen übersetzt ins Einheitsintervall*
(Z_1, Z_2, Z_3) sei ein dreifacher p-Münzwurf mit $p = 1/4$. Die $[0,1]$-wertige Zufallsvariable Y sei definiert durch $Y := \frac{1}{2}Z_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 Z_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 Z_3$.
a) Bestimmen Sie die Verteilungsgewichte von Y.
b) Bestimmen Sie den Wert $F(b)$ der Verteilungsfunktion von Y für
(i) $b = 1/2$, (ii) $b = 3/8$, (iii) $b = 9/16$, (iv) $b = 2$.
c) Skizzieren Sie die Funktion F.
d) Besitzt die Verteilung von Y eine Dichte?

22. S. *Rechnen mit kontinuierlich verteilten Zufallsvariablen*
U sei uniform verteilt auf $[0,1]$ und X sei standard-exponentialverteilt. Berechnen Sie
(i) den Erwartungswert (ii) die Varianz (iii) die Verteilungsfunktion (iv) die Dichte von
a) $3 + U^{1/3}$ b) $4X + 5$.

23. *Verteilungstransformationen hin und zurück*
a) X sei exponentialverteilt zum Parameter 2. Wie ist $Y := e^{-2X}$ verteilt?
b) Z sei standard-normalverteilt und Φ sei die Verteilungsfunktion von $\mathrm{N}(0,1)$. Wie ist $\Phi(Z)$ verteilt?
c) Φ sei wie in b), $\Phi^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ sei die Umkehrfunktion von Φ, und U sei uniform verteilt auf $(0,1)$. Wie ist $\Phi^{-1}(U)$ verteilt?
d) Geben Sie eine Funktion $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ an, sodass für uniform auf $(0,1)$ verteiltes U die Zufallsvariable $h(U)$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 10 und Varianz 4.

24. *Wieviele Standardabweichungen?*
a) Wieviele Standardabweichungen muss man links und rechts vom Erwartungswert legen, damit eine normalverteilte Zufallsvariable mit W'kt 0.9 in das so entstehende Intervall fällt? Anders gesagt: Für welches c gilt $\mathbf{P}(X \in (\mu - c\sigma, \mu + c\sigma)) = 0.9$ für ein $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteiltes X?
Hinweis: Der R-Befehl `qnorm` *ist hilfreich. Warum reicht es, die Frage für $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ zu beantworten?*
b) Finden Sie einen um den Erwartungswert symmetrischen Bereich, in den eine binomialverteilte Zufallsvariable mit $n = 1000$ und $p = 0.2$ mit Wahrscheinlichkeit annähernd 0.9 fällt.