Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik"

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 22. November 2019, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS) oder bis zu diesem Termin direkt an Ihre Tutorin/Ihren Tutor, z. B. über die Kästen in der RM6, 3. Stock

Geben Sie kurze und treffende Begründungen für Ihre Ergebnisse!

17. *Unabhängig oder nicht?*
a) *Für zwei diskrete Zufallsvariable X_1, X_2 ist die Unabhängigkeit äquivalent dazu, dass die Zeilen der Matrix ihrer gemeinsamen Verteilungsgewichte zueinander proportional sind.* Rekapitulieren (und vervollständigen) Sie den Beweis dieses Kriteriums anhand der Hinweise auf der neuen Folie am Ende von Abschnitt 1 der Vorlesung 4b.

b) Wir betrachten vier Beispiele, bei den ersten beiden ist $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{b, c\}$ bei den letzten beiden ist $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{b, c, d\}$. Die Matrizen der gemeinsamen Verteilungsgewichte von (X_1, X_2) sind

i)

	b	c
1	0.1	0.3
2	0.15	0.45

ii)

	b	c
1	0.1	0.3
2	0.2	0.4

iii)

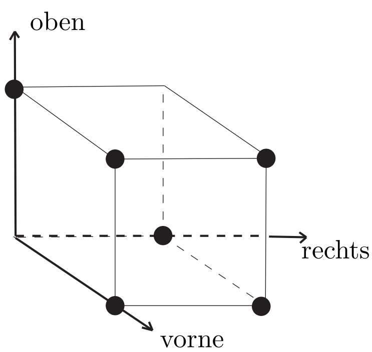
	b	c	d
1	6γ	7γ	10γ
2	12γ	14γ	20γ
3	18γ	21γ	30γ

iv)

	b	c	d
1	6γ	7γ	10γ
2	13γ	14γ	20γ
3	17γ	21γ	30γ

Was ist in (iii) bzw. (iv) der Wert von γ? In welchen der Beispiele sind X_1 und X_2 unabhängig, in welchen nicht?

18. *Paarweise Unabhängigkeit von Ereignissen.*
$X = (X_1, X_2, X_3)$ mit Wertebereich $\{o, u\} \times \{\ell, r\} \times \{h, v\}$ beschreibe eine rein zufällige Wahl aus den 6 in der Skizze markierten Ecken des Würfels (die beiden nicht markierten Ecken bleiben tabu). Vier der markierten Ecken sind "vorne", drei sind "rechts" und drei sind "oben". Wir betrachten die Ereignisse
$E_1 := \{X_1 = o\} = \{X \text{ landet oben}\}$,
$E_2 := \{X_2 = r\} = \{X \text{ landet rechts}\}$,
$E_3 := \{X_3 = v\} = \{X \text{ landet vorne}\}$.



a) Bestimmen Sie die 2×2-Matrix der Verteilungsgewichte von (X_1, X_2). Sind E_1 und E_2 unabhängig? Sind sie positiv korelliert?

b) Gilt $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1) \cdot \mathbf{P}(E_2) \cdot \mathbf{P}(E_3)$?

19. S *Die Standardabweichung der zufälligen Trefferquote.* In der Stunde Eins haben wir den Anteil p einer Teilfläche F an einer Gesamtfläche G dadurch geschätzt, dass wir n Punkte rein zufällig in G geworfen und als Schätzer $\hat{p}$ die relative Treffzahl von F genommen haben. Berechnen Sie die Standardabweichung von $\hat{p}$, wenn der tatsächliche Wert von p gleich $1/5$ ist. Was ergibt sich für (i) $n = 100$, (ii) $n = 400$, (iii) $n = 1600$?

20. S *Die Varianz des Stichprobenmittels beim Ziehen ohne Zurücklegen.*
In einer Population von 90 Individuen haben 45 Individuen die Größe 10, 15 Individuen die Größe 5 und 30 Individuen die Größe 20. Es sei X die Größe eines rein zufällig aus der Population gewählten Individuums.

a) Berechnen Sie (i) den Erwartungswert, (ii) die Varianz, (iii) die Standardabweichung von X.

b) Wir ziehen rein zufällig und ohne Zurücklegen aus der Population und bezeichen mit X_i die Größe des i-ten gezogenen Individuums.

α) Warum hängt (für $1 \le i \ne j \le 90$) die Kovarianz $\mathbf{Cov}[X_i, X_j]$ nicht von i und j ab?
β) Berechnen Sie die Kovarianz von X_1 und X_2 aus der Identität $0 = \mathbf{Var}(X_1 + \ldots + X_{90})$.
γ) Berechnen Sie die Varianz des Stichprobenmittels $\frac{1}{30}(X_1 + \cdots + X_{30})$.

c) Schätzen Sie mittels der Ungleichung von Chebyshev die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass das Stichprobenmittel $\frac{1}{30}(X_1 + \cdots + X_{30})$ um mehr als 2 von μ abweicht.