Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 15. November 2019, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS) oder bis zu diesem Termin direkt an Ihre Tutorin/Ihren Tutor, z. B. über die Kästen in der RM6, 3. Stock

Geben Sie kurze und treffende Begründungen für Ihre Ergebnisse!

13. Aus einer Population bestehend aus 20 Wiesbadenern und 40 Frankfurtern wurde eine Stichprobe vom Umfang 15 (d.h. eine 15-elementige Teilmenge der Population) herausgegriffen. In dieser befanden sich ein Wiesbadener und 14 Frankfurter.

a) Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Wiesbadener in einer *rein zufälligen* Stichprobe vom Umfang 15?

b) Wie wahrscheinlich ist in einer rein zufällig gezogenen Stichprobe eine Anzahl von Wiesbadenern, die vom (in a) berechneten) Erwartungswert mindestens so weit abweicht wie die beobachtete Anzahl 1?
Hinweis: Hier ist der R-Befehl sum(dhyper(. . .)) hilfreich. Finden Sie mittels des Befehls `?dhyper` *heraus, was das mit der Aufgabenstellung zu tun hat, und finden Sie die passenden Summationsgrenzen.*

14. Es sei $(X_1, \dots, X_7)$ uniform verteilt auf $\{1, \dots, 10\}^7$. Wir interpretieren X_i als die zufällige Platzwahl des Individuums i, mit 10 möglichen Plätzen. Dabei ist mehrfache Wahl eines Platzes erlaubt, es handelt sich um ein 7-faches $(1/10, \dots, 1/10)$-Würfeln.)
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleiben sowohl Platz 1 als auch Platz 3 leer?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt mindestens einer der Plätze 1, 2 oder 3 leer?
Hinweis: Betrachten Sie die Ereignisse $E_i := \{\text{Platz } i \text{ wird nicht gewählt}\}$ und verwenden Sie die Einschluss-Ausschluss-Formel.
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommen alle drei Plätze 1, 2, 3 zum Zug?

15.S. a) $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ sei ein n-facher p-Münzwurf. Wie wahrscheinlich ist (für $n \geq 5$) das Ereignis $\{Z_3 = 1, Z_5 = 1\}$?

b) Berechnen Sie $\mathbf{E}[X^2]$ für eine Binom(n, p)-verteilten Zufallsvariable X, indem Sie die Darstellung $X = Z_1 + \cdots + Z_n$ verwenden.

c) Folgern Sie aus b) mit der Linearität des Erwartungswertes, dass für ein Binom(n, p)-verteiltes X gilt:

$$\mathbf{E}[(X - np)^2] = npq \quad \text{und} \quad \mathbf{E}\left[\left(\frac{X}{n} - p\right)^2\right] = \frac{pq}{n}.$$

d) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Anzahl der Erfolge beim n-fachen fairen Münzwurf um mehr als 0.01 von 0.5 abweicht,
(i) für $n = 10000$,
(ii) für $n = 1000000$
mittels der Ungleichung von Markov nach oben ab.

16.S. Ähnlich wie in der ersten Stunde denken wir uns eine Quadratfläche S in g gleich große Teilquadrate zerlegt, wobei g eine große Quadratzahl ist. Die Teilquadrate seien mit $j = 1, \dots, g$ indiziert. Wir wählen wiederholt rein zufällig Punkte aus S und notieren die Indizes der Teilquadrate, in die sie fallen, als $X_1, X_2, \dots$. Mit A bezeichnen wir die Vereinigung der Teilquadrate 1,2,3,4.
a) Wie ist die Anzahl derjenigen Punkte aus den ersten $\lfloor g/2 \rfloor$ Punkten verteilt, die in A fällt?
b) Wie ist die Wartezeit bis zum ersten Treffer von A verteilt?
c) Berechnen Sie eine Näherung für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keiner der ersten $\lfloor g/2 \rfloor$ Punkte in A fällt
i) mit der Poissonappromation (für die Verteilung der Anzahl der Treffer)
ii) mit der Exponentialapproximation (für die Verteilung der Wartezeit bis zum ersten Treffer).