Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik"

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 08. November 2019, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS) oder bis zu diesem Termin direkt an Ihre Tutorin/Ihren Tutor, z. B. über die Kästen in der RM6, 3. Stock

9.S. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X^{(n)} = (X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, X_3^{(n)})$ multinomialverteilt mit den Parametern $3n; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$. Berechnen Sie die Näherung von $\mathbf{P}\left(X_1^{(n)} = X_2^{(n)} = X_3^{(n)} = n\right)$ mit der Stirling-Formel.

10. $X = (X_1, X_2, X_3)$ sei multinomialverteilt mit den Parametern $n; p_1, p_2, p_3$. Wie ist die Zufallsvariable $X_1 + X_2$ verteilt? Argumentieren Sie
(i) intuitiv (über die Summe von Zählvariablen in einem Würfelexperiment), und
(ii) analytisch, indem Sie für $k \leq n$ die folgende Gleichheit nachweisen:

$$\sum_{k_1+k_2=k} \binom{n}{k_1, k_2, n-k} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{n-k} = \binom{n}{k} (p_1 + p_2)^k p_3^{n-k}.$$

11. $W = (W_1, \ldots, W_7)$ beschreibe ein 7-maliges gewöhnliches Würfeln. Wie wahrscheinlich ist es, dass
(i) mehr als dreimal die 1 gewürfelt wird,
(ii) mehr als dreimal die 6 gewürfelt wird,
(iii) die viertgrößte der 7 gewürfelten Augenzahlen in die Menge $\{2, 3, 4, 5\}$ fällt?[1]

12.S. An einem runden Tisch befinden sich 30 Sitzplätze, nummeriert mit 1,..., 30, sodass auch die Plätze 1 und 30 benachbart sind. Die Vertreter von 3 Delegationen (5 aus Land A, 10 aus Land B, 15 aus Land C) werden rein zufällig platziert.
(i) Wie wahrscheinlich ist es, dass Platz 6 und 7 mit Vertretern aus dem selben Land besetzt werden?
(ii) Was ist die erwartete Anzahl von Paaren benachbarter Plätze, auf denen Vertreter aus demselben Land sitzen?
(iii) Was ist die erwartete Anzahl von Paaren benachbarter Plätze, auf denen Vertreter aus verschiedenen Ländern sitzen?

[1] Dabei ist die viertgrößte von sieben (nicht notwendigerweise verschiedenen) Zahlen $w_1, \ldots, w_7$ dasjenige (eindeutig bestimmte) Element $v \in \{w_1, \ldots, w_7\}$, für welches für vier der $j \in \{1, \ldots, 7\}$ gilt: $w_j \leq v$ und für drei der $j \in \{1, \ldots, 7\}$ gilt: $w_j \geq v$.