Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik"

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 01. November 2019, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS) oder bis zu diesem Termin direkt an Ihre Tutorin/Ihren Tutor, z. B. über die Kästen in der RM6, 3. Stock

5.S. Es sei T der Zeitpunkt der ersten Kollision beim sukzessiven rein zufälligen Besetzen von g Plätzen (mit einem Objekt nach dem anderen), E_n sei das Ereignis "keine Kollision unter den ersten n Objekten",[1] und $w_n := \mathbf{P}(E_n)$ dessen Wahrscheinlichkeit.

(a) Drücken Sie das Verteilungsgewicht $\rho_n := \mathbf{P}(T = n)$ durch w_{n-1}, n und g aus.

(b) Es sei $g = 100$. Bestimmen Sie ein möglichst kurzes Intervall I, sodass gilt: $\mathbf{P}(T \in I) \geq 0.5$.

6. Beweisen Sie auf den Spuren von Jakob Bernoulli die folgende Identität für $1 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \sum_{b=k}^{n} \binom{b-1}{k-1}.$$

Denken Sie sich dazu eine k-elementigen Teilmenge B von $\{1, \ldots, n\}$ auf zweistufige Weise gewählt: erst das größte Element b von B, dann die restlichen $k-1$ Elemente. Wieviele Ausgänge dieses zweistufigen Experimentes gibt es?

7. Aus einer rein zufälligen Permutation X von $1, \ldots, n$ kann man "durch zufälliges Einschieben" eine rein zufällige Permutation X' von $1, \ldots, n+1$ gewinnen, indem man erst für $X'(n+1)$ eine rein zufällige Wahl aus $1, \ldots, n+1$ trifft und dann die $X'(i)$, $1 \leq i \leq n$, gewinnt, indem man all diejenigen $X(i)$, die größer oder gleich $X'(n+1)$ sind, um 1 erhöht. Verwenden Sie diese Tatsache, um mit Induktion zu zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $j = 2, \ldots, n$ die Anzahl

$$H(j) := \#\{i < j : X(i) > X(j)\}$$

der *Fehlstände*, an denen j zusammen mit einem kleineren Partner beteiligt ist, uniform auf $\{0, 1, \ldots, j-1\}$ verteilt ist.[2]

8.S Wie wahrscheinlich ist es, dass bei einer uniformen Besetzung von drei Plätzen (namens 1,2,3) mit 10 (ununterscheidbaren) Objekten der Platz 1 mit mindestens zwei Objekten besetzt ist? Beantworten Sie die Frage sowohl mittels einer Bijektion zu einem passenden $S_{n,g}$ also auch durch Abzählen (einer passenden Teilmenge) eines de Finetti-Dreiecks.

---

[1] In der gedruckten Version des Übungsblattes war dieses Ereignis mit A_n bezeichnet. In den Folien zu VL1b und im Buch S. 2 ist jedoch A eine Teilmenge von $\{1, \ldots, g\}^n$. Mit der notationelle Änderung in der aktuellen Version ergibt sich die instruktive Beziehung $E_n = \{(X_1, \ldots, X_n) \in A\}$.

[2] Der hier vorgeschlagene Lösungsweg ist eine Variante des im Buch, Seite 9, für dieselbe Aufgabenstellung vorgeschlagenen Lösungswegs.