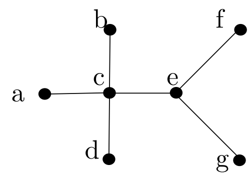
Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

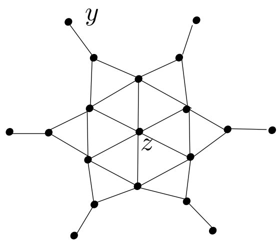
Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 24. Januar 2020, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

41. Für die Zyklendarstellung einer Permutation hat sich eine suggestive Schreibweise eingebürgert, die an dem folgenden Beispiel einsichtig wird: Die Zyklendarstellung der in Vorlesung 2a betrachteten (und dort auf Folie 14 veranschaulichten) Permutation 5 , 2, 7, 3, 1, 4, 6 von $1, \dots, 7$ schreibt man als $(1\,5)(2)(3\,7\,6\,4)$.
Wir beschreiben jetzt ein rekursives Verfahren zur Erzeugung einer zufälligen Permutation von $1, \dots, i$ aus einer Permutation von $1, \dots, i-1$, ausgehend von deren Zyklendarstellung: *Das Element i wird jeweils mit W'keit $\frac{1}{i}$ auf einen der $i-1$ Plätze rechts neben $1, 2, \dots, i-1$ (innerhalb des jeweiligen Zyklus) gesetzt. Ebenfalls mit W'keit $\frac{1}{i}$ wird das Element i in einen neuen Zyklus (der Länge 1) gesetzt.*
Dieses Verfahren fassen wir als mehrstufiges Zufallsexperiment auf $(X_1, \dots, X_n)$, bei dem der Wertebereich von X_i die Permutationen von $1, \dots, i$ sind.
a) Beweisen Sie induktiv (mittels der Multiplikationsregel), dass das oben beschriebene Verfahren auf eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, n$ führt.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen in einer rein zufälligen Permutation von $1, \dots, 100$ die Zahlen $1, 2, 3$ im selben Zyklus?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen in einer rein zufälligen Permutation von $1, \dots, 100$ die Zahlen $50, 60, 75$ im selben Zyklus?

42. S Wir betrachten die gewöhnliche Irrfahrt auf dem skizzierten Graphen.
a) Berechnen Sie
i) die Wahrscheinlichkeit, bei Start in c den Zustand f vor dem Zustand b zu treffen,
ii) die Wahrscheinlichkeit, bei Start in g nach drei Schritten in e zu sein,
iii) die Wahrscheinlichkeit, bei Start in e nach drei Schritten in g zu sein.
b) Sei π die Gleichgewichtsverteilung dieser Irrfahrt. Berechnen Sie
i) $\mathbf{P}_\pi(X_3 = e)$,
ii) $\mathbf{P}_\pi(X_0 = e | X_3 = g)$.



43. S Wir betrachten die gewöhnliche Irrfahrt auf dem skizzierten Graphen.
Berechnen Sie
a) die erwartete Treffzeit des “zentralen” Knotens z bei Start im Knoten y,
b) die Gleichgewichtsverteilung der Irrfahrt.
Hinweis zu a): Wieso reicht es hier, den “Abstand” vom Zentrum zu betrachten, sodass man am Ende kein großes Gleichungssystem lösen muss?



44. Die Markovkette X auf $\{0, 1, 2, 3\}$ habe die folgenden Übergangsgewichte:
$P(0, 1) = 1$, $P(1, 0) = 1/5$, $P(1, 1) = 2/5$, $P(1, 2) = 2/5$, $P(2, 1) = 2/3$, $P(2, 3) = 1/3$, $P(3, 2) = 1$.
Berechnen Sie die erwartete Treffzeit des Zustands 3 bei Start im Zustand 0.