

Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 25. Oktober 2019, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS) oder bis zu diesem Termin direkt an Ihre Tutorin/Ihren Tutor, z. B. über die Kästen in der RM6, 3. Stock

1. Wie wahrscheinlich ist es, beim dreimaligen (fairen) Würfeln genau zweimal eine Augenzahl größer als 4 zu erzielen?

2.S Wie in der Vorlesung betrachten wir eine Gesamtfläche S bestehend aus g Pixeln und eine Teilfläche A bestehend aus $f := p \cdot g$ Pixeln. Dabei sei p eine Zahl im Intervall $[0, 1]$, und sowohl g als auch f seien natürliche Zahlen. Die dreimalige rein zufällige Wahl eines Pixels aus S (entsprechend einem “Ziehen mit Zurücklegen”), beschreiben wir durch eine auf dem Wertebereich $\{1, \dots, g\}^3$ uniform verteilte Zufallsvariable $X = (X_1, X_2, X_3)$.

a) Wieviele Ausgänge von X gibt es?

b) Wieviele Ausgänge von X gibt es, bei denen X_1 auf die Menge $\{1, \dots, f\}$ und X_2 sowie X_3 auf die Menge $\{f + 1, \dots, g\}$ fallen? Drücken Sie das Ergebnis durch g und p aus.

c) Wieviele Ausgänge von X gibt es, bei denen genau eines der drei gewählten Pixel auf die Menge $\{1, \dots, f\}$ fällt?

d) Wie wahrscheinlich ist es, dass von den drei zufällig aus S gewählten Pixeln genau eines aus A gewählt wird?

e) Bestimmen Sie die 4 möglichen Ausgänge der zufälligen Trefferquote M von A , sowie deren Verteilungsgewichte.

f) Illustrieren Sie für $p = 0.195$ und $n = 3$ das Ergebnis aus e) mittels des über den Link auf der Stoff-Web-Seite zur Verfügung gestellten R-Programms “Monte Carlo Simulation”.¹ Betrachten Sie dazu ein Histogramm der Schätzwerte aus (z.B.) 1000 Wiederholungen des Zufallsexperiments.

3. In der Vorlesung haben wir den Anteil p einer Teilfläche A an einer Gesamtfläche (“Quadrat”) S mit einem einfachen Monte-Carlo-Verfahren geschätzt: n Punkte wurden rein zufällig in S geworfen und der Anteil M der Treffer von A ermittelt. Die (durch unabhängiges Wiederholen dieses Zufallsexperimentes ermittelte “empirische”) Verteilung von M hat uns ein Bild von der Zuverlässigkeit der Schätzung vermittelt. Erkunden Sie (wieder für $p = 0.195$) mittels des R-Programms “Monte Carlo Simulation”, wie sich die Genauigkeit der Schätzung verändert, wenn (i) $n = 200$ (ii) $n = 800$ (iii) $n = 3200$ Punkte in die Menge S geworfen werden: Um welchen Faktor (circa) wird jeweils das Histogramm der Schätzwerte schmaler?

4.S. Von 4 Objekten wird jedes rein zufällig auf einen von 16 möglichen Plätzen gesetzt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses “es kommt zu keiner Kollision”

(a) über die exakte Berechnung

(b) über die Stirling-Näherung

(c) über die Approximation durch Linearisierung.

Kommentieren Sie kurz die Güte der in (b) und (c) erzielten Näherung.

¹Das frei verfügbare statistische Programmpaket R bekommen Sie über www.r-project.org, zu finden auch über google → R, auf Ihren Rechner.