Analysis für Informatiker

Merkblatt 4a
Ableitungsregeln

1. **Summen und Produkte**: Seien f und g glatte Funktionen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Ableitungen f' und g'. Dann gilt

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(fg)' = fg' + f'g$$
$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

---

2. **Verkettete Funktionen** Sei

$$z(x) := f(g(x)).$$

Dann gilt die *Kettenregel:*

$$z'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Die Kettenregel ist die wichtigste der Ableitungsregeln; sie wird immer wieder angewandt. Sie wird noch transparenter, wenn man schreibt

$$z = f(y) \qquad y = g(x).$$

Dann

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Beispiele: $(e^{x^2})' = (e^{x^2})(2x)$; $((x^3+1)^5)' = (5(x^3+1)^4)(3x^2)$; $(\frac{1}{f(x)})' = (-\frac{1}{f(x)^2})(f'(x))$

---

3. **Umkehrfunktionen**: Nehmen wir an, f und g sind zueinander inverse Funktionen:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y).$$

Dann gilt

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}.$$

Dieses wird offensichtlich, wenn man schreibt

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \qquad g'(y) = \frac{dx}{dy}.$$

In der Anwendung ist es manchmal am einfachsten, die Kettenregel anzuwenden.
Beispiel: Um $(\log(x))'$ aus der Definition von $\log(x)$ herzuleiten, schreiben wir:

$$e^{log(x)} = x$$
$$\left(e^{log(x)}\right)' = (x)'$$
$$(e^{log(x)})log'(x) = 1$$
$$log'(x) = \frac{1}{x}$$