Analysis für Informatiker

Merkblatt 1a
$\exp(x)$ und $\log(x)$

1. $\mathbf{exp(x)}$: Die Funktion $y = \exp(x)$, $-\infty < x < \infty$, ist die Lösung der Differentialgleichung

$$\boxed{y' = y}$$

mit $y(0) = 1$. Die Zahl e ist durch $e := \exp(1) \approx 2.718$ gegeben.

---

2. $\mathbf{e^x}$: Die Potenz e^x kann man durch $e^x := \exp(x)$ definieren. Aus der Grundregel

$$\boxed{e^{u+v} = e^u e^v}$$

folgen sofort die anderen Potenzregeln:

$$e^0 = 1 \qquad e^1 = e \qquad e^{1/2} = \sqrt{e} \qquad e^{-1} = 1/e \qquad (e^u)^w = e^{uw}.$$

---

3. $\mathbf{log(x)}$: Der (natürliche) Logarithmus $\log(x)$ (oder $\ln(x)$) ($x > 0$) ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion:

$$e^{\log(x)} = x$$

Aus der Grundregel

$$\boxed{\log(uv) = \log(u) + \log(v)}$$

leitet man weitere nützliche Beziehungen ab:

$$\log(1) = 0 \qquad \log(e) = 1$$

$$\log(\sqrt{x}) = (1/2)\log(x) \qquad \log(1/x) = -\log(x) \qquad \log(x^c) = c\log(x).$$

---

4. $\mathbf{b^x}$: Für beliebige positive Zahlen b bestimmt man b^x dadurch, dass man b durch $e^{\log(b)}$ ersetzt:

$$\boxed{b^x = e^{x\log(b)}.}$$

Die Umkehrfunktion ist $\log_b(x)$:

$$\boxed{y = \log_b(x) \Longleftrightarrow b^y = x.}$$

Durch Logarithmieren der Gleichung rechts sieht man

$$\log_b(x) = \log(x)/\log(b).$$

---

5. **Ableitungen**:

$$\boxed{(e^x)' = e^x \qquad\qquad (\log(x))' = 1/x.}$$

Wie allgemein bei Ableitungen gilt für kleines x:

$$\boxed{f(a+x) \approx f(a) + xf'(a).}$$

Also:

$$e^{a+x} \approx e^a(1+x) \qquad\qquad \log(a+x) \approx \log(a) + x/a.$$

---

6. **Verhalten für großes $\mathbf{x}$**: Egal wie groß n gewählt wird, gilt für $x \to \infty$

$$\boxed{x^n/e^x \to 0.}$$

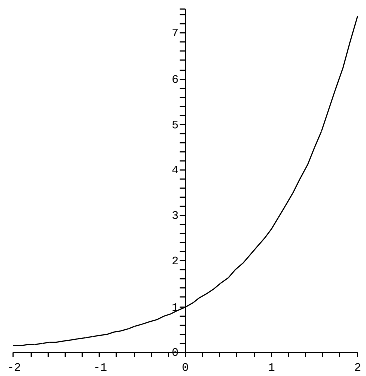
Egal wie klein $\varepsilon > 0$ gewählt wird, gilt für $x \to \infty$

$$\boxed{\log(x)/x^\varepsilon \to 0.}$$

Salopp sagt man: „Für $x \to \infty$ ist e^x größer als jede (noch so große) Potenz von x; log(x) ist kleiner als jede (noch so kleine) Potenz.“ Heuristisch kann man sich das asymptotische Wachstum von $\log(x)$ als das von $\boxed{x^\varepsilon}$ mit infinitesimalem $\varepsilon > 0$ vorstellen.

---

exp(x)



log(x)