Vorlesung 8b

Zweistufige Zufallsexperimente

1. Begriffsbildung
und ein erstes Beispiel

Stellen wir uns ein zufälliges Paar $X = (X_1, X_2)$ vor,

das auf zweistufige Weise zustande kommt:

es gibt eine Regel, die besagt, wie X_2 verteilt ist,

gegeben dass X_1 den Ausgang a_1 hat.

Beispiel:

In Stufe 1 entscheiden wir uns

mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ für einen fairen Würfel

und mit W'keit $1/3$ für einen gezinkten:

drei Seiten mit 5, drei mit 6 beschriftet.

X_2:= die dann (in Stufe 2) geworfene Augenzahl.

$$\mathbf{P}(X_2 = 6) = ?$$

Wenn in Stufe 1 der faire Würfel gewählt wird,

dann sind die Verteilungsgewichte von X_2

$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6}$$

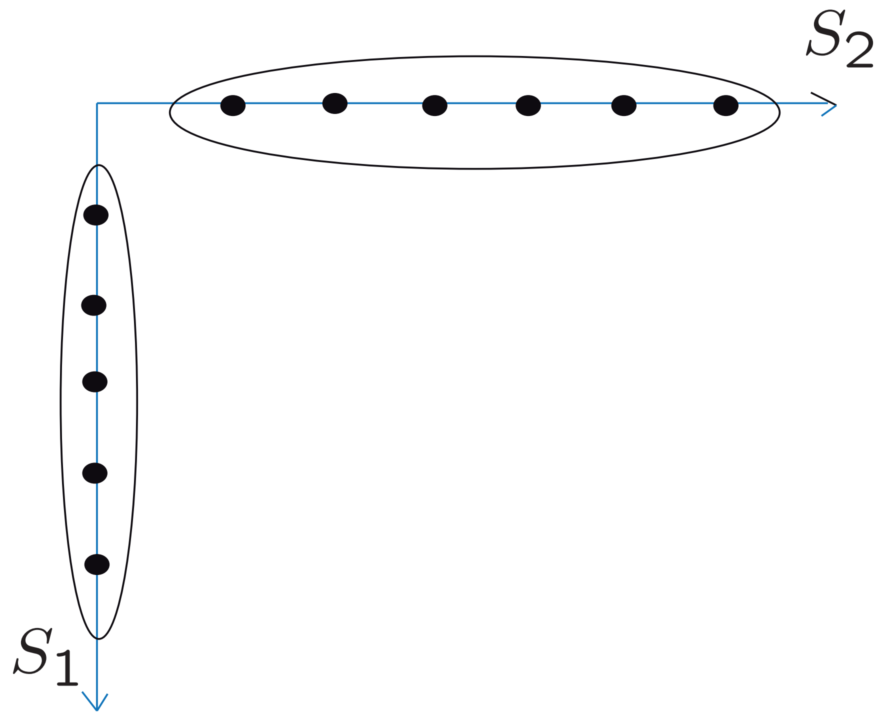
Wenn in Stufe 1 der gezinkte Würfel gewählt wird,

dann sind die Verteilungsgewichte von X_2

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(X_2 = 6) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}.$$

2. Ein allgemeiner Rahmen

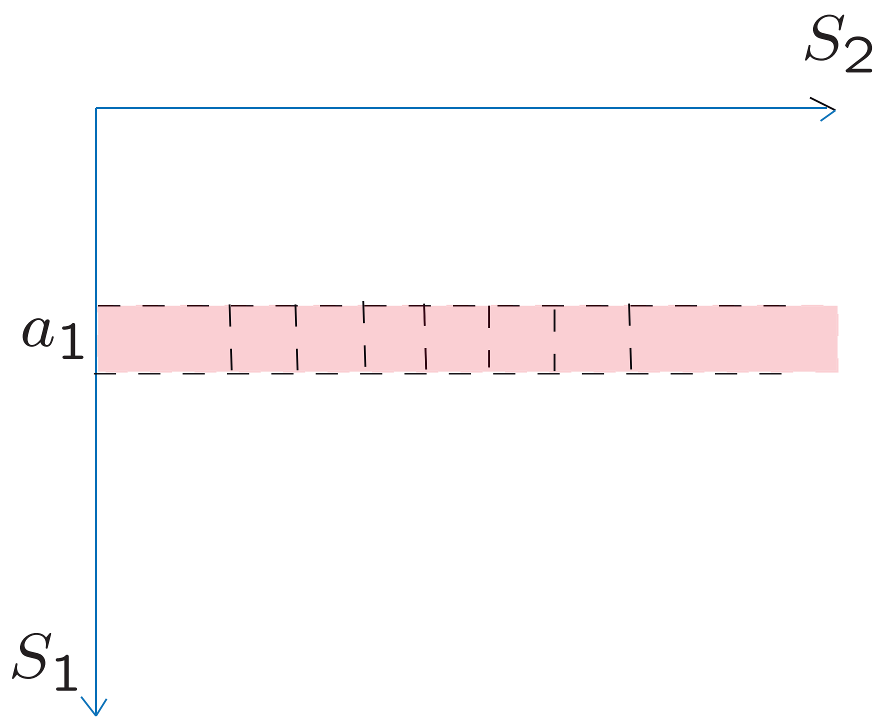


S_1 und S_2 seien (fürs Erste) diskrete Mengen.

Stellen wir uns vor: Wenn in Stufe 1

die Wahl auf das Element $a_1 \in S_1$ fällt,

dann landet man in der mit a_1 bezeichneten Zeile.

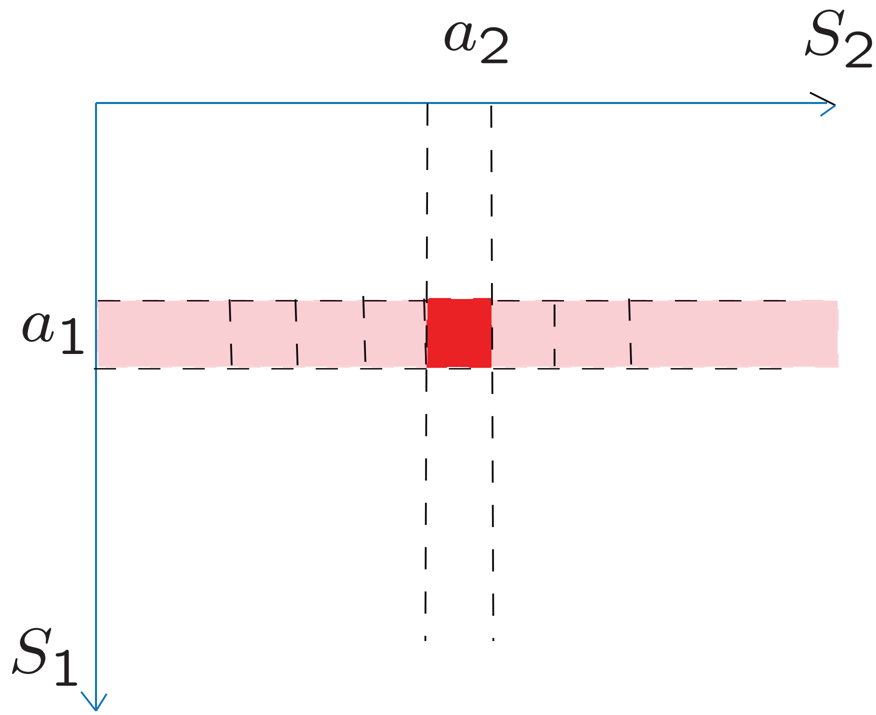


S_1 und S_2 seien (fürs erste) endliche Mengen.

Stellen wir uns vor: **Wenn** in Stufe 1

die Wahl auf das Element $a_1 \in S_1$ fällt,

dann landet man in der mit a_1 bezeichneten Zeile.

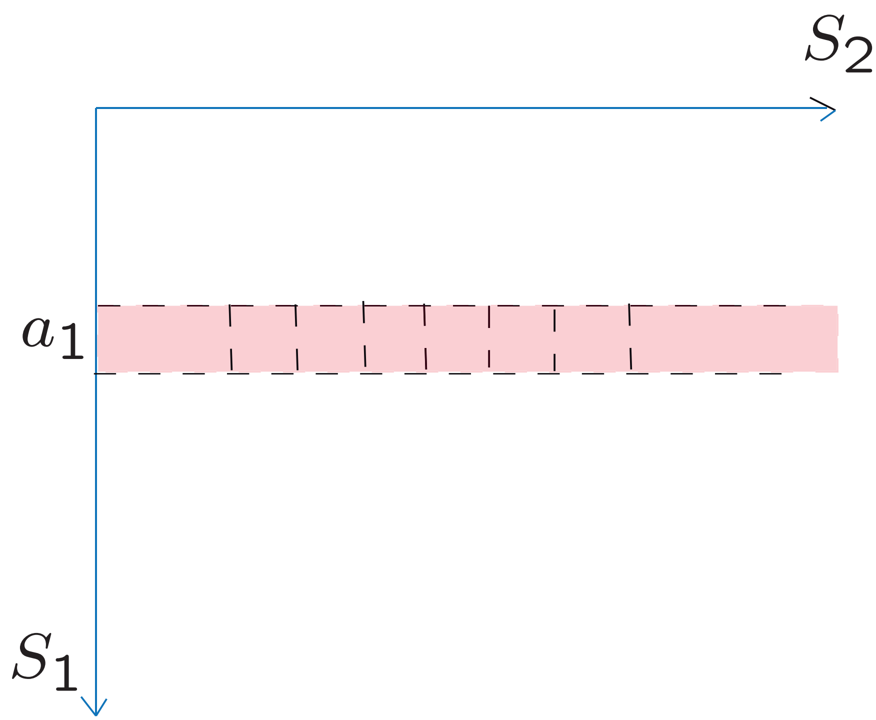


Wenn dann in Stufe 2

die Wahl auf das Element $a_2 \in S_2$ fällt,

landet man in dem mit (a_1, a_2) bezeichneten Feld

(Zeile a_1, Spalte a_2)

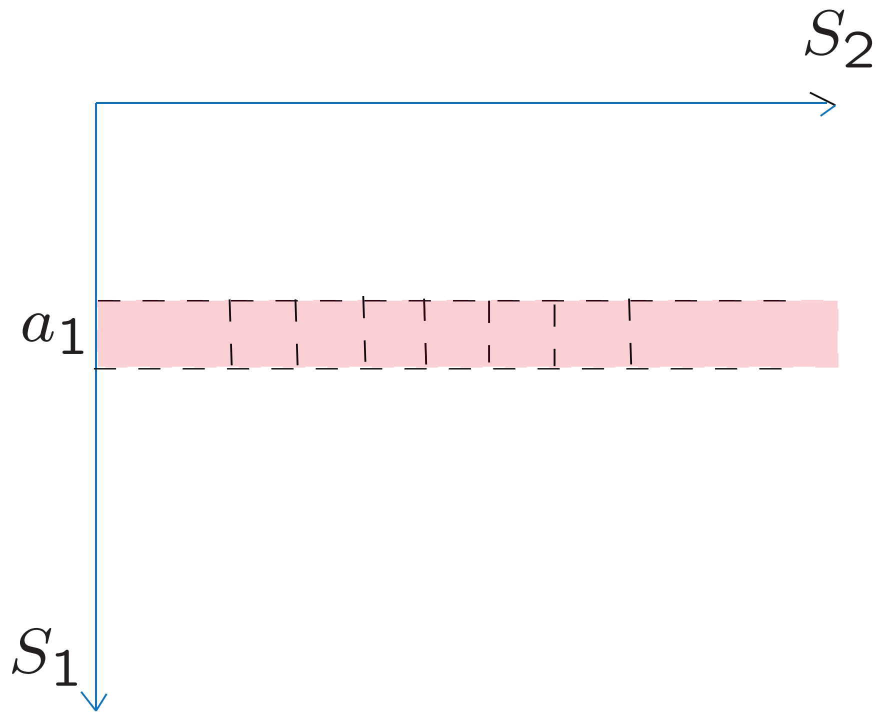


Jetzt bringen wir Wahrscheinlichkeiten ins Spiel.

Sei X_1 eine S_1-wertige Zufallsvariable mit Verteilung ρ.

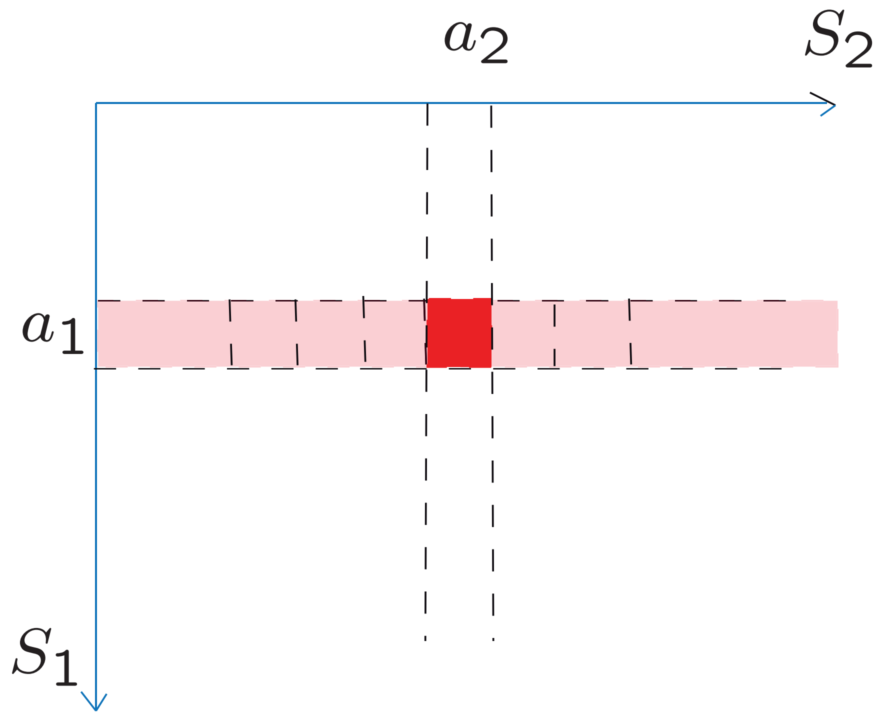
Mit Wahrscheinlichkeit $\rho(a_1)$ fällt X_1 auf a_1

.... und landet man damit in Stufe 1 in Zeile a_1.



Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, .)$ eine Verteilung auf S_2

Das heißt im hier betrachteten diskreten Fall:
$P(a_1, a_2)$, $a_2 \in S_2$, sind Verteilungsgewichte auf S_2,
also nichtnegative Zahlen, die zu 1 summieren.

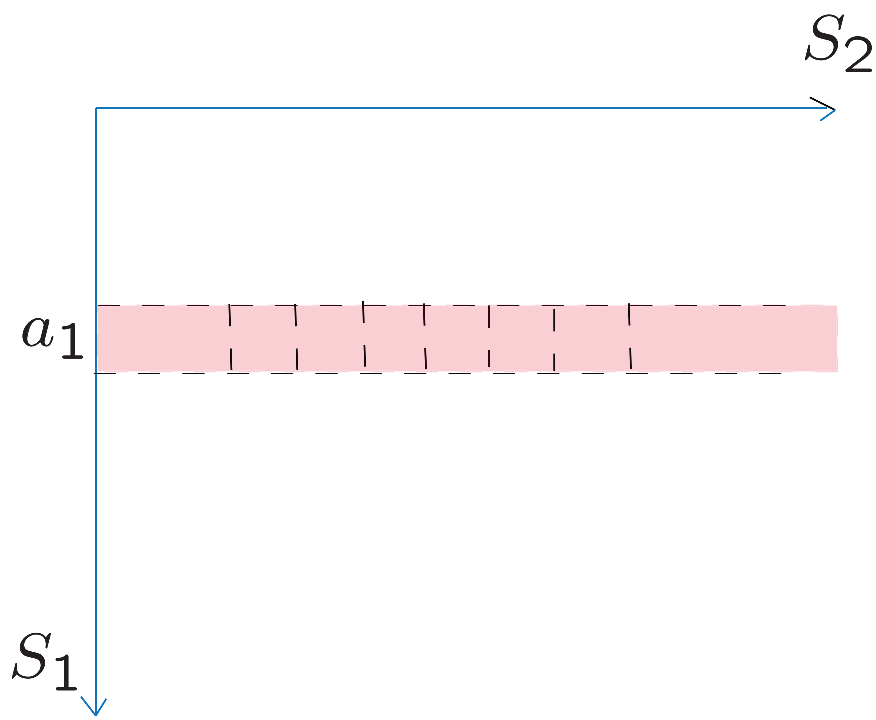


Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, .)$ eine Verteilung auf S_2.

Vorstellung:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat das Ereignis $\{X_2 = a_2\}$ die W'keit $P(a_1, a_2)$.

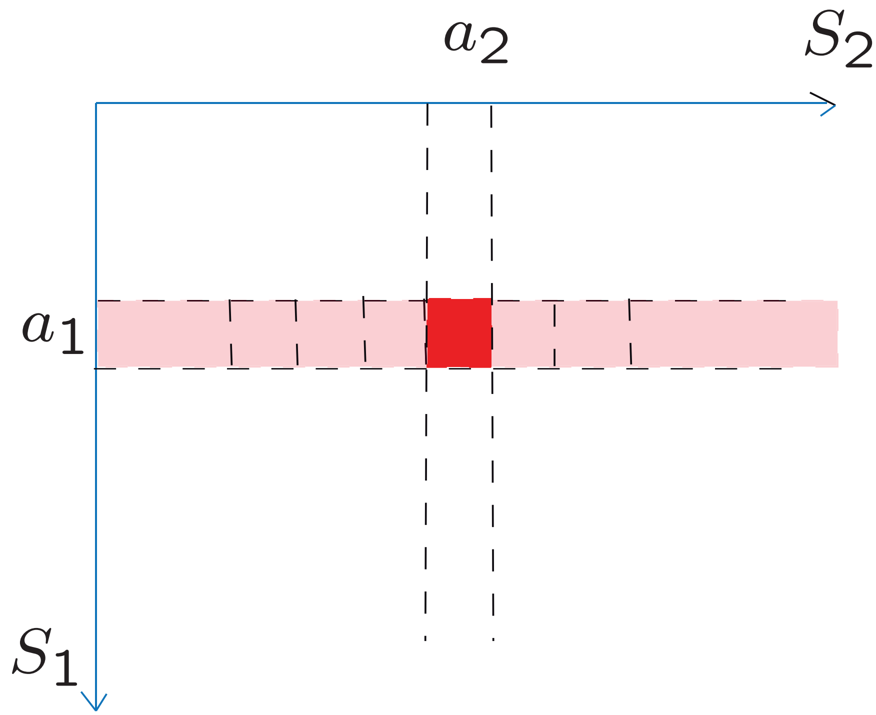


Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, .)$ eine Verteilung auf S_2

Anders gesagt:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat die Zufallsvariable X_2 die Verteilung $P(a_1, .)$.



Das Gewicht $\rho(a_1)$ aus Stufe 1

wird in Stufe 2 gemäß $P(a_1, .)$

auf die Zeile a_1 aufgeteilt:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1)P(a_1, a_2).$$

3. Zwei Beispiele

Beispiel A:

In Stufe 1

wählen wir eine auf $\{1, 2, 3\}$ uniform verteilte Zahl X_1.
In Stufe 2 verschieben wir das in Stufe 1 erzielte Ergebnis

mit W'keit 1/2 um eins nach rechts

und mit W'kt 1/2 um eins nach links.

Gegeben $\{X_1 = 3\}$, ist X_2 uniform verteilt auf $\{2, 4\}$.

$$\mathbf{P}(X_1 = 3, X_2 = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\,.$$

$$\mathbf{P}(X_2 = 2) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = 2) = \frac{1}{3}.$$

Das nächste Beispiel weist über den diskreten Fall hinaus.

Beispiel B:

In Stufe 1

stellt sich eine reelle Zahl X_1 ein.

In Stufe 2 wird dazu

eine unabhängige standard-normalverteilte ZV'e addiert:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat X_2 die Verteilung N$(a_1, 1)$.

4. Startverteilung, Übergangswahrscheinlichkeiten und gemeinsame Verteilung

Zweistufige Zufallsexperimente - der diskrete Fall:

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein zufälliges Paar

mit diskretem Zielbereich $S = S_1 \times S_2$.

Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, .)$ eine Verteilung auf S_2.

Damit ist hier gemeint, dass $P(a_1, a_2)$, $a_2 \in S_2$, Verteilungsgewichte auf S_2 sind, also nichtnegative Zahlen, die zu 1 summieren.

Vorstellung: gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat die die Zufallsvariable X_2 die Verteilung $P(a_1, .)$.

Schreibweise:

$$P(a_1, a_2) =: \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2) \ .$$

Aus der Verteilung von X_1

(der sogenannten *Startverteilung*, hier bezeichnet mit ρ)

und den Verteilungen $P(a_1, \, .)$

(den sogenannten *Übergangsverteilungen*)

gewinnt man die gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2

mit den Gewichten

$$\nu(a_1, a_2) = \rho(a_1)\, P(a_1, a_2)$$

oder anders geschrieben

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\,.$$

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\,.$$

Wir bemerken: Genau dann

hängen die Verteilungen $\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in \cdot)$ nicht von a_1 ab,

wenn X_1 und X_2 unabhängig sind.

$$\nu(a_1, a_2) = \rho(a_1)\, P(a_1, a_2)$$

$$P(a_1, a_2),\ a_1 \in S_1,\ a_2 \in S_2$$

sind die Einträge der sogenannten

Übergangsmatrix P.

Jede einzelne Zeilensumme von P ist 1.

Die Zeilensummen der Matrix $\nu(.,.)$

ergeben die Einträge $\rho(.)$.

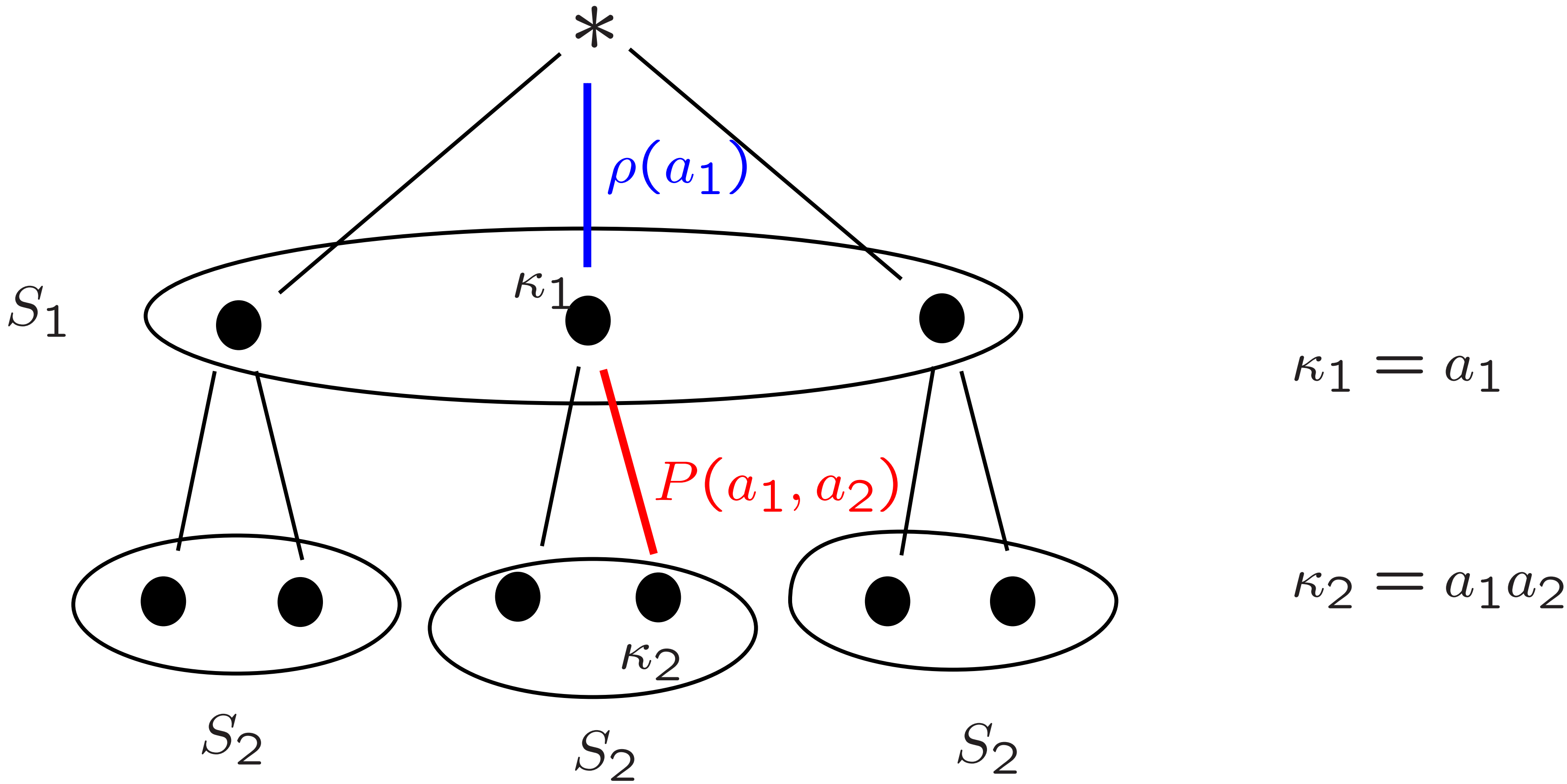
Die Gesamtsumme aller $\nu(a_1, a_2)$ ist 1.

5. Veranschaulichung durch einen Baum

Ein zweistufiges Zufallsexperiment

kann in seiner Abfolge

durch einen *Baum der Tiefe* 2 veranschaulicht werden:



$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1) P(a_1, a_2)\,.$$

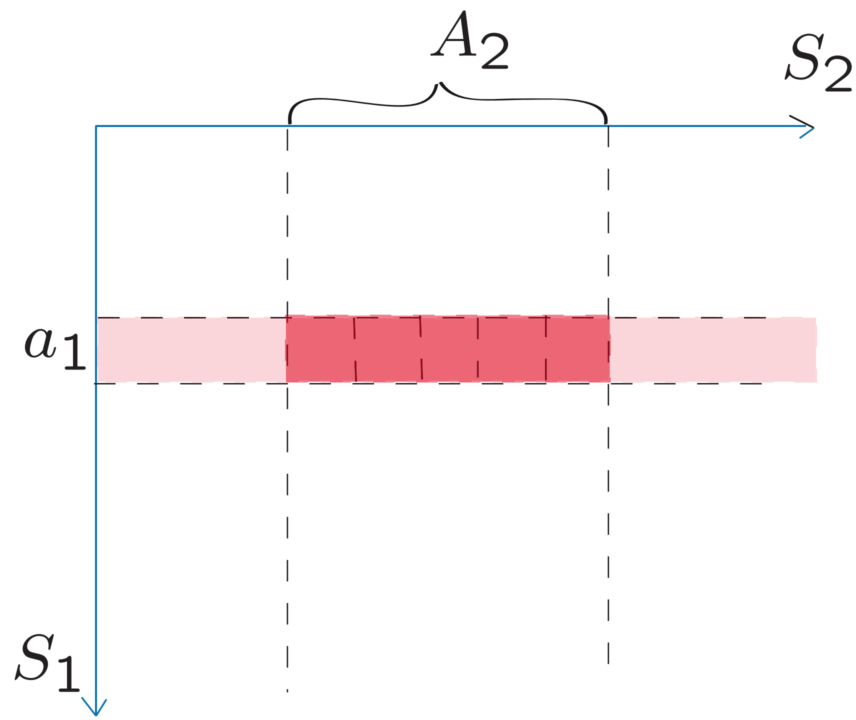
(Produkt der Kantengewichte entlang des Weges von $*$ zum Knoten κ_2)

6. Zerlegung der Wahrscheinlichkeit nach der ersten Stufe

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ .$$

Summiert über $a_2 \in A_2$, mit $A_2 \subset S_2$, erhält man daraus:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2)\ .$$



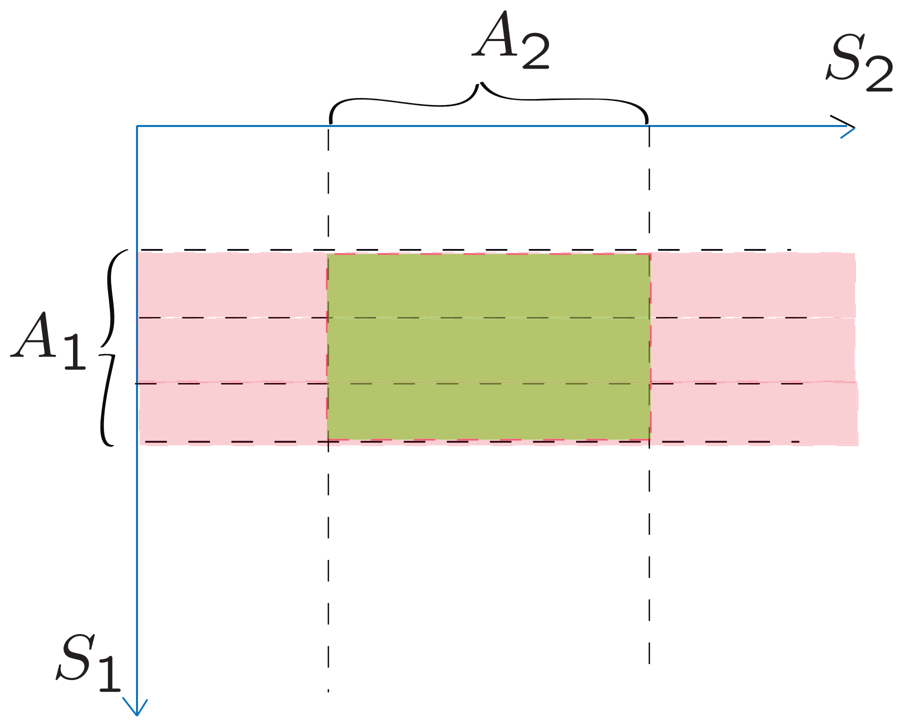
A_2
S_2
a_1
S_1

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2)\ .$$

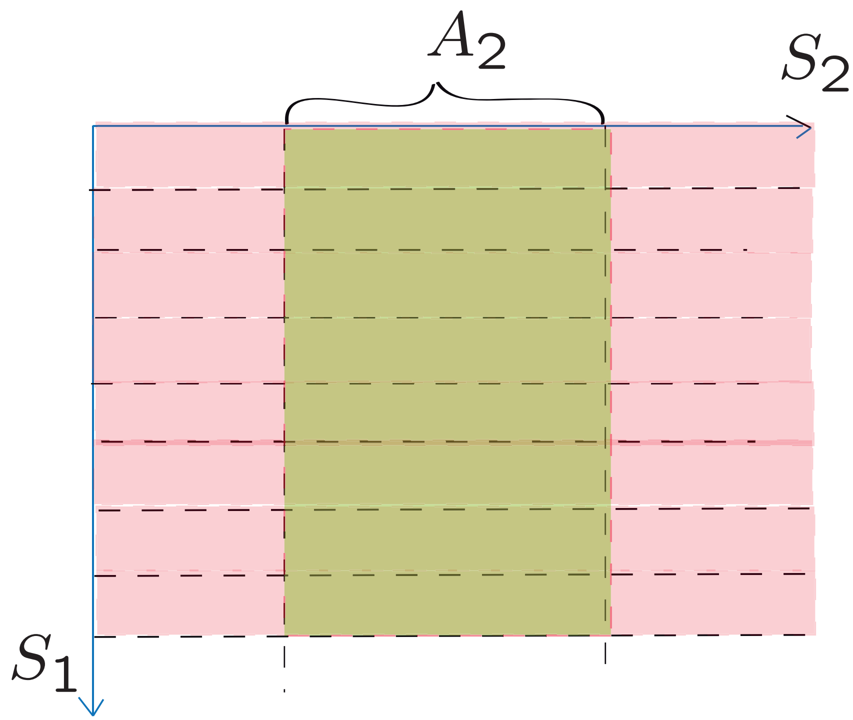
Summation über $a_1 \in A_1$, mit $A_1 \subset S_1$:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in A_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$



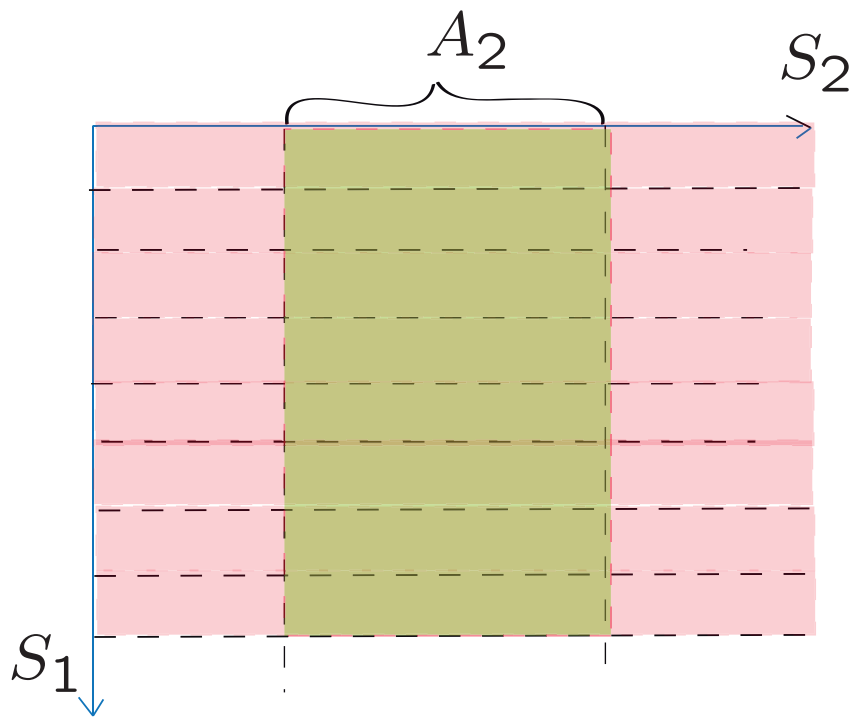
$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2)$$
$$= \sum_{a_1 \in A_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$



Speziell mit $A_1 := S_1$ ergibt sich

$$\mathbf{P}(X_1 \in S_1, X_2 \in A_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$



$$\mathbf{P}(X_2 \in A_2) = \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$

"Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit"

"Zerlegung nach dem ersten Schritt"