Vorlesung 7a

Der zentrale Grenzwertsatz

1. Rekapitulation und Auftakt:

Eine Eigenschaft der Normalverteilung

Am Ende von Vorlesung 6b haben wir aus der Rotationsinvarianz der zweidimensionalen Standard-Normalverteilung gefolgert:

Sind Z_1 und Z_2 unabhängig und standard-normalverteilt, dann ist auch

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(Z_1 + Z_2)$$

standard-normalverteilt.

Was 2 recht ist, ist hier auch n billig:

Genau dasselbe geometrische Argument

(jetzt im $\mathbb{R}^n$ statt im $\mathbb{R}^2$) zeigt, dass für

unabhängige, standard-normalverteilte $Z_1, \ldots, Z_n$ auch

$$(*) \qquad \frac{1}{\sqrt{n}}(Z_1 + \cdots + Z_n)$$

standard-normalverteilt ist.

Denn: $\frac{1}{\sqrt{n}}(\vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n) =: \vec{u}$ ist ein Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$ (er zeigt in Richtung der Hauptdiagonalen). $(*)$ ist die $\vec{u}$- Komponente des rotationssymmetrisch verteilten Vektors $\vec{Z} := Z_1\vec{e}_1 + \cdots Z_n\vec{e}_n$.
Also ist $(*)$ so verteilt wie Z_1, die $\vec{e}_1$-Komponente von $\vec{Z}$. $\square$

Folgerung:

Sind $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig und $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt,

dann ist $\dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ $N(0,1)$-verteilt.

Denn dieses ist gleich

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{Y_1 - \mu}{\sigma} + \cdots + \frac{Y_n - \mu}{\sigma} \right).$$

Die standardisierte Summe von unabhängigen,
identisch normalverteilten Zufallsvariablen
ist standard-normalverteilt.

2. Der Zentrale Grenzwertsatz: Die Botschaft

Die eben getroffene Aussage

"Die standardisierte Summe von unabhängigen,
identisch normalverteilten Zufallsvariablen
ist standard-normalverteilt."

hat eine gewaltige Weiterung

(asymptotisch für große n)

im Zentralen Grenzwertsatz:

Der Zentrale Grenzwertsatz:

"Die standardisierte Summe von VIELEN

unabhängigen, identisch verteilten

nicht notwendig normalverteilten

$\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen

mit endlicher Varianz

ist annähernd standard-normalverteilt"

Formal:

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$. Dann gilt für alle $c < d \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \in [c, d]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{P}(Z \in [c, d]).$$

Dabei ist Z standard-normalverteilt.

In Worten:

Die standardisierte Summe von n unabhängigen,
identisch verteilten $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen
mit endlicher Varianz
konvergiert für $n \to \infty$ in Verteilung
gegen eine standard-normalverteilte Zufallsvariable.

Ein Beweis des Zentralen Grenzwertsatzes findet sich im Buch S. 78-80.

3. Zentraler Grenzwertsatz:

Meilensteine in seiner Geschichte

Abraham de Moivre:

Der faire Münzwurf (1733)

Pierre-Simon Laplace:

Allgemeine binomiale Zufallsgrößen (1812)

Pafnuty Lvovich Chebyshev:

Skizze eines Beweises für den allgemeinen Fall (1887)

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov:

Allgemeiner zentraler Grenzwertsatz (1901)

Noch allgemeiner (1906)

Andrei Andreyevich Markov:

weitere Verallgemeinerungen (~ 1910)

Nehmen wir an,

diese Herren hätten sich

auf ihre vielen anderen Interessen

beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Nehmen wir an,

diese Herren hätten sich

auf ihre vielen anderen Interessen

beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Unbekannt.

Könnten wir ihn entdecken?

Wie kämen wir auf die “Glockenkurve”?

Warum gerade $e^{-x^2/2}$?

e

Ein Ausflug mit Brooks Ferebee

4. Ein Beispiel: Summen von unabhängigen uniform verteilten Zufallsvariablen

Wir denken an

Rundungsfehler bei Addition

In Wirklichkeit

$$\pi =$$

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 5...$$

Im Rechner

$$\pi \leftarrow 3.14159265358979$$

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$A = a^{[R]} + \varepsilon X \qquad \varepsilon = 10^{-15}$$

Annahme: X uniform verteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = ?$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^{[R]} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Wie groß ist der Fehler?

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx ?$$

Der Zentrale Grenzwertsatz gibt die Auskunft:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ ist}$$

für große n

approximativ $N(0, n\,\sigma^2_{X_1})$-verteilt.

Ein Beispiel:

$X_1, X_2, \ldots$ unabhängig

und uniform auf $[-0.5, 0.5]$ verteilt

Empirische Verteilung von

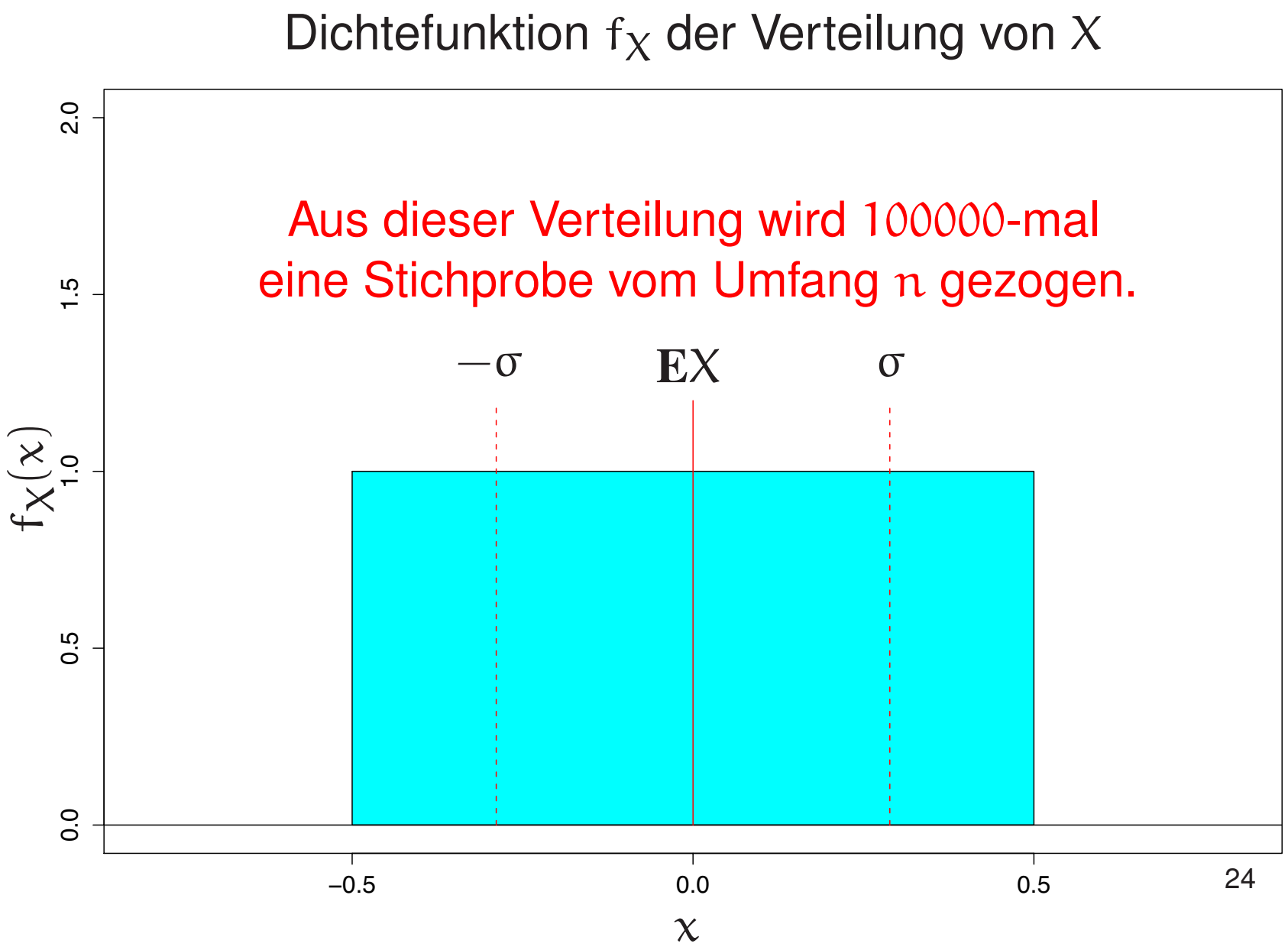
$$S_n := X_1 + ... + X_n$$

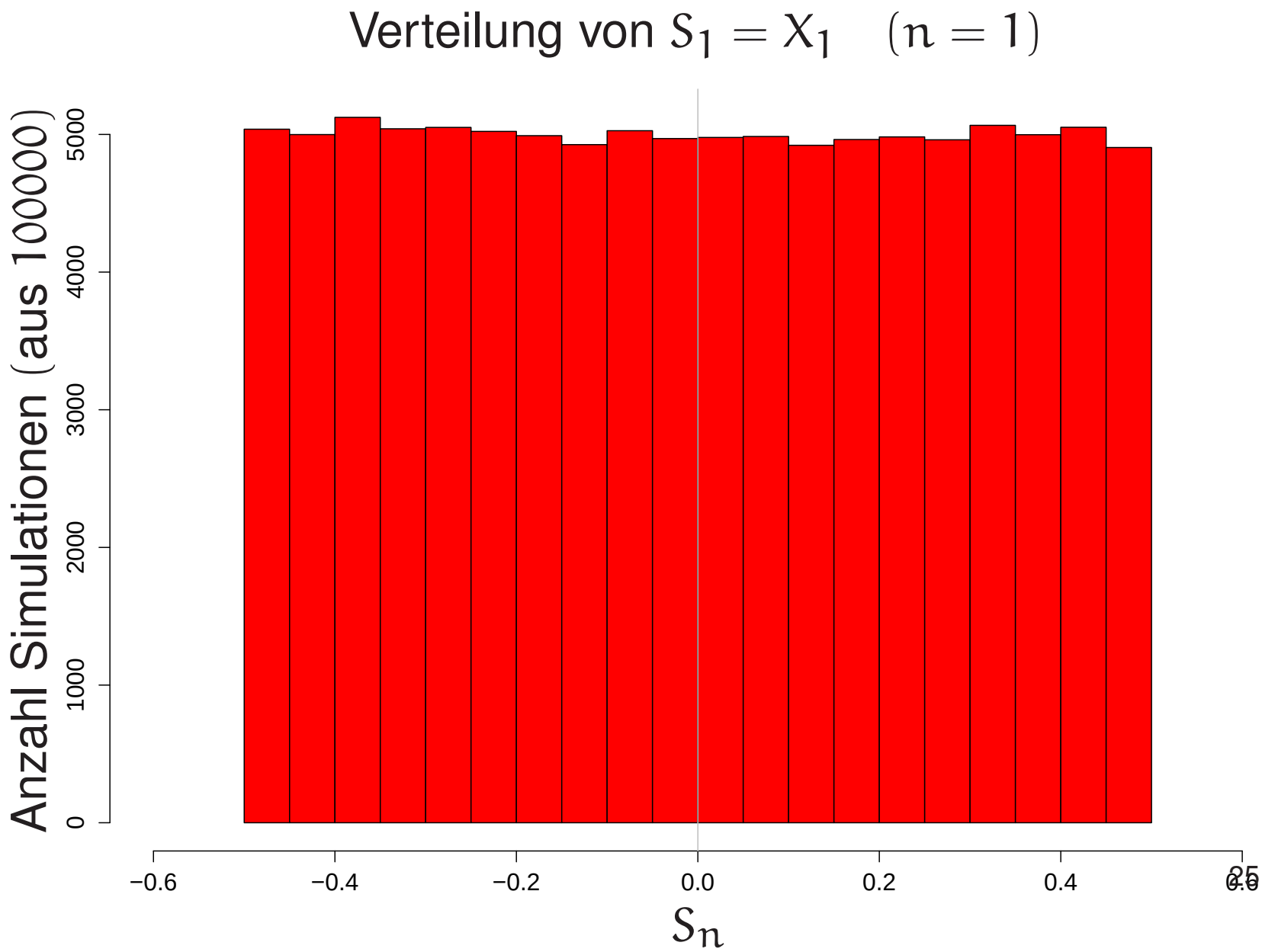
100000 Simulationen

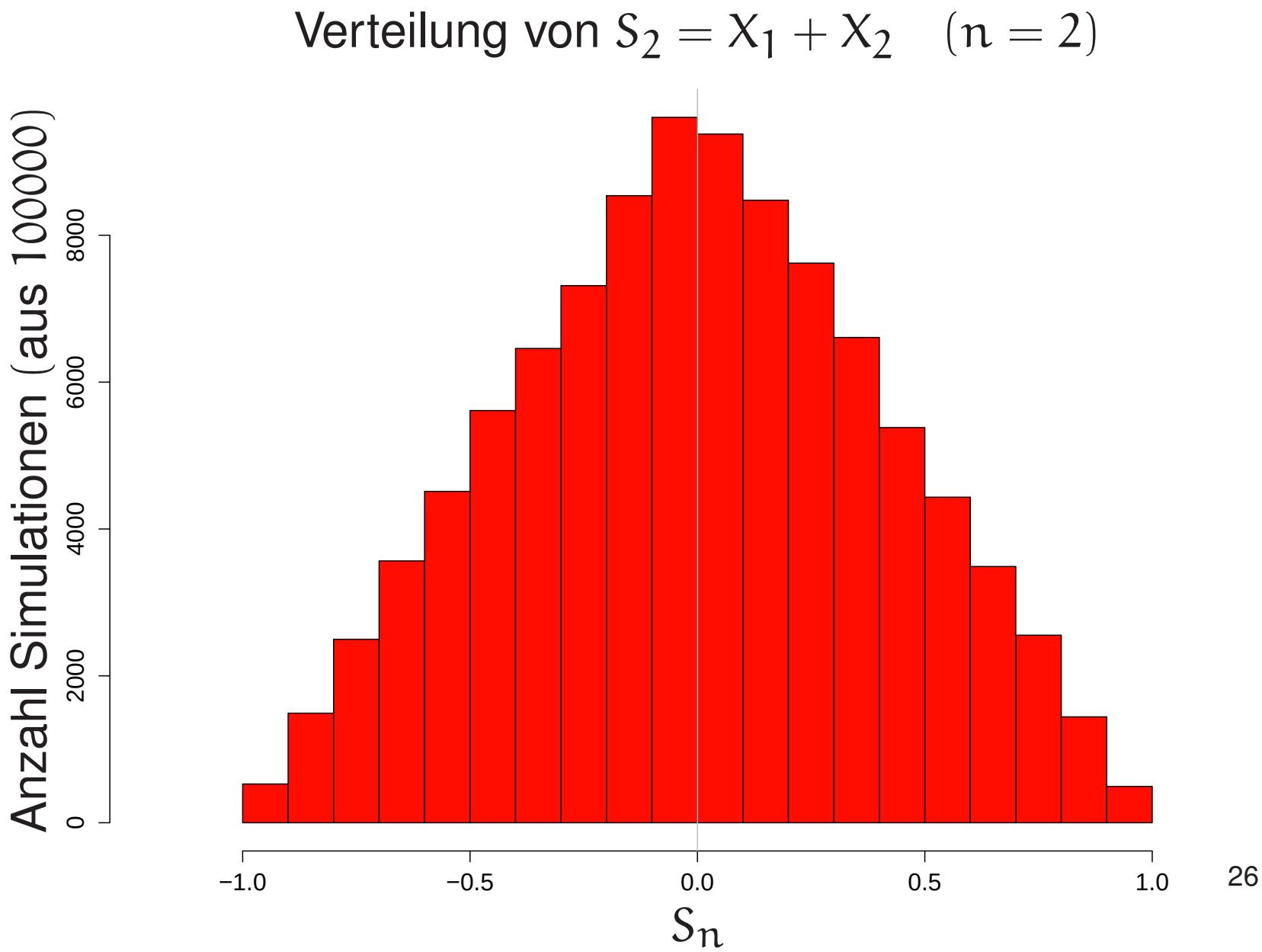
jeweils für

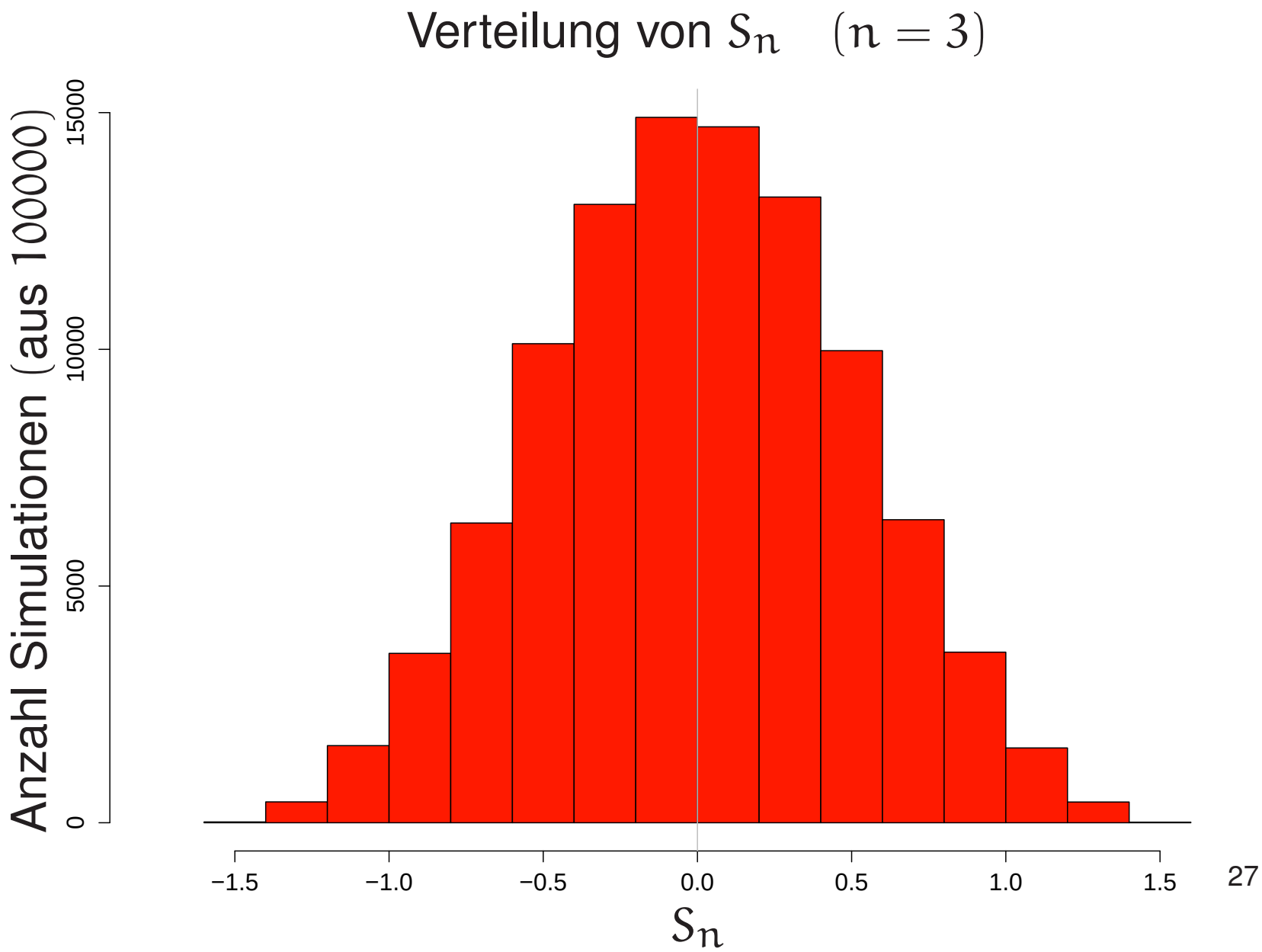
$$n = 1, 2, ..., 10$$

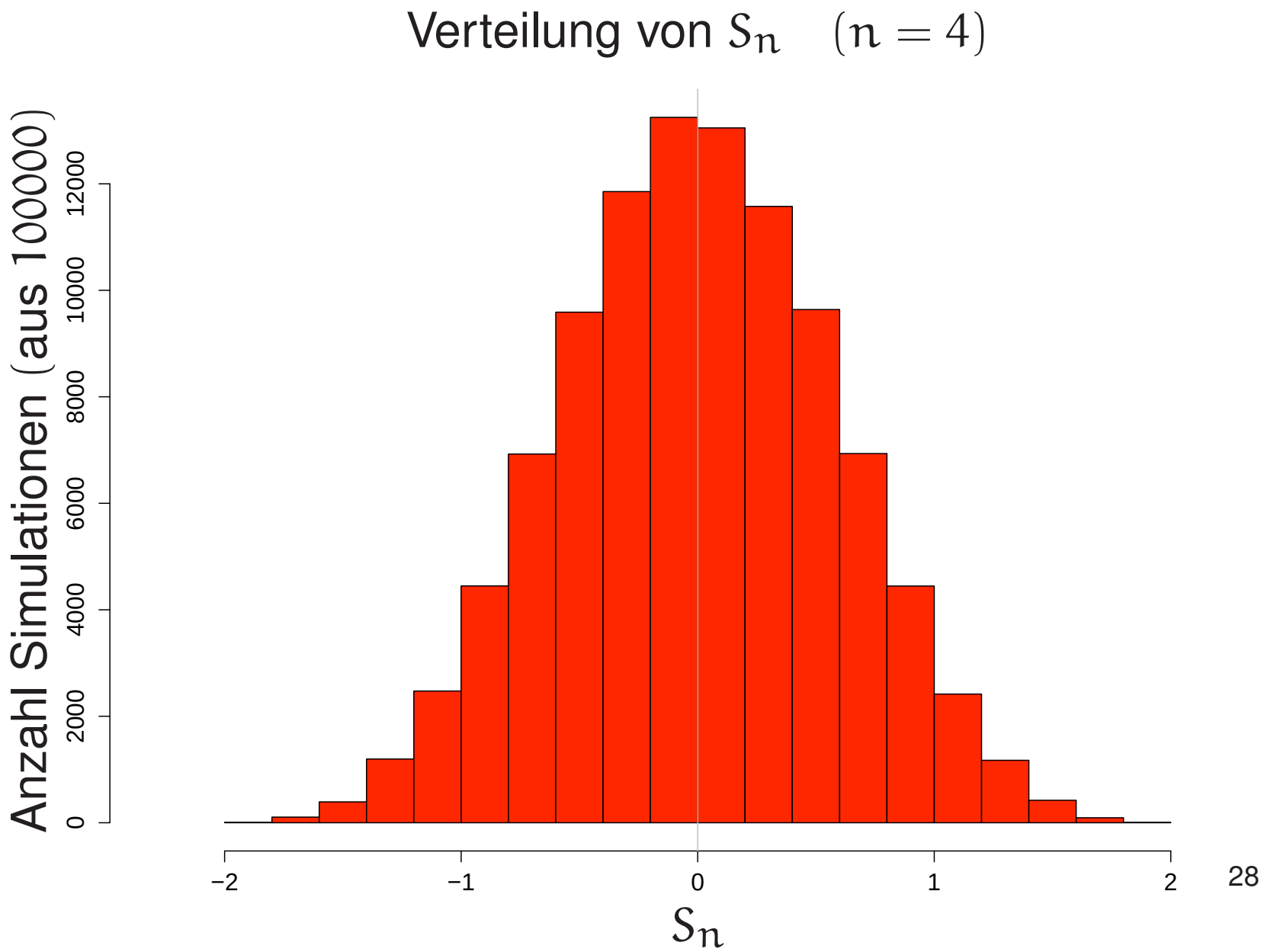
$$n = 15, 20, 30, ..., 100$$

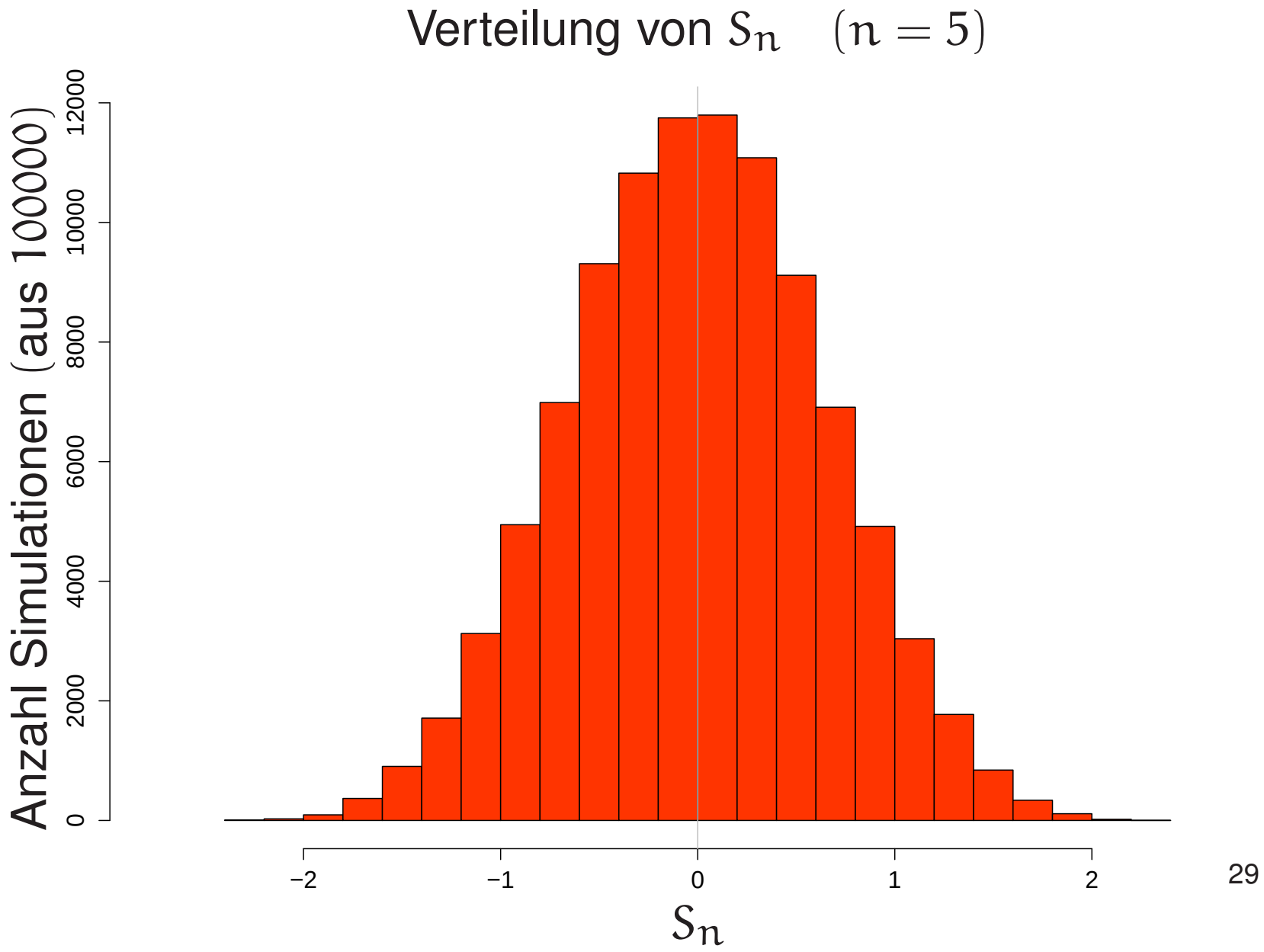

Dichtefunktion f_X der Verteilung von X
Aus dieser Verteilung wird 100000-mal
eine Stichprobe vom Umfang n gezogen.
$-\sigma$
EX
σ
$f_X(x)$
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
0.0
0.5
24
x

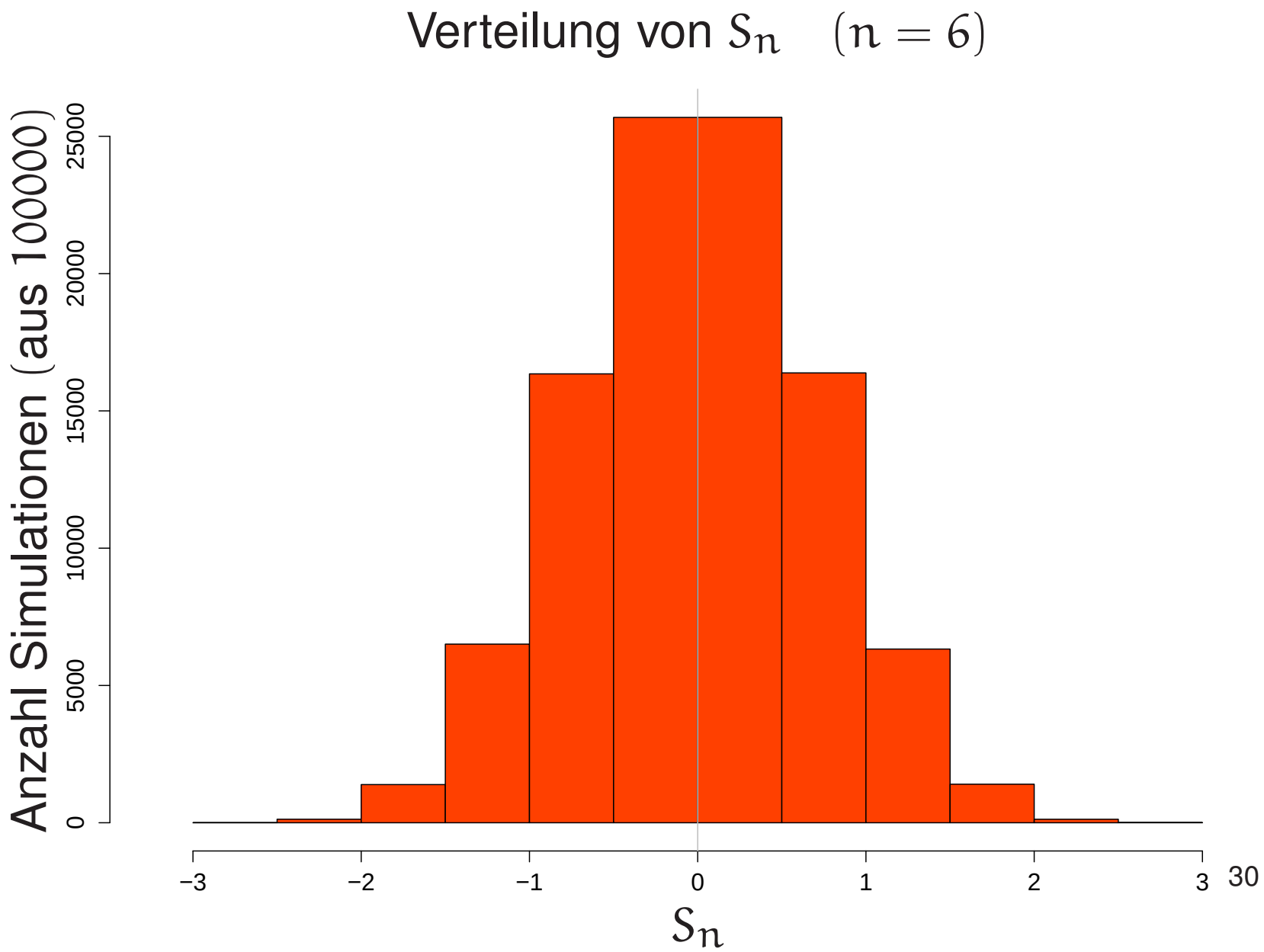

Verteilung von $S_1 = X_1 \quad (n = 1)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
1000
2000
3000
4000
5000
−0.6
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4
S_n

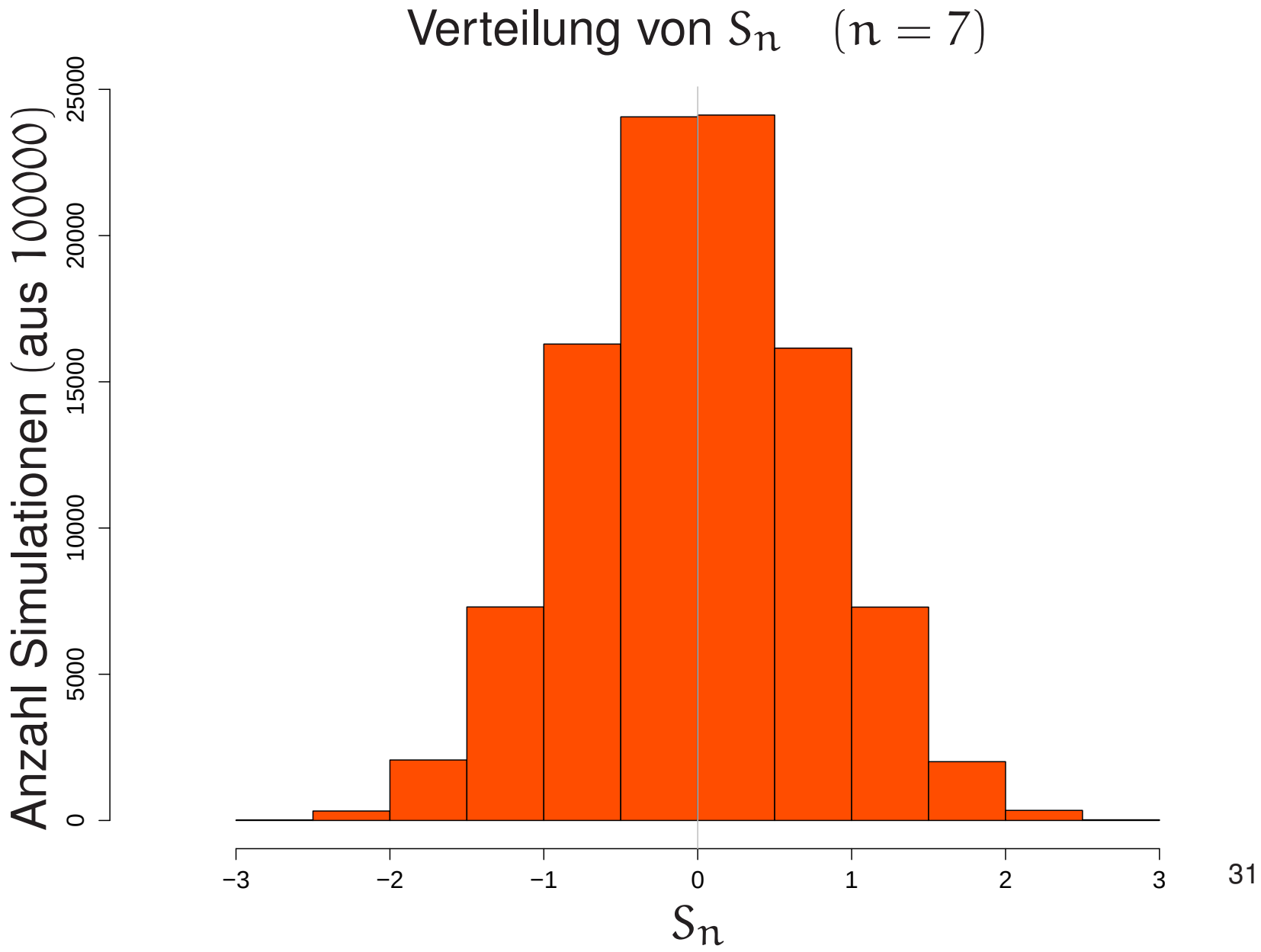

Verteilung von $S_2 = X_1 + X_2 \quad (n = 2)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
S_n

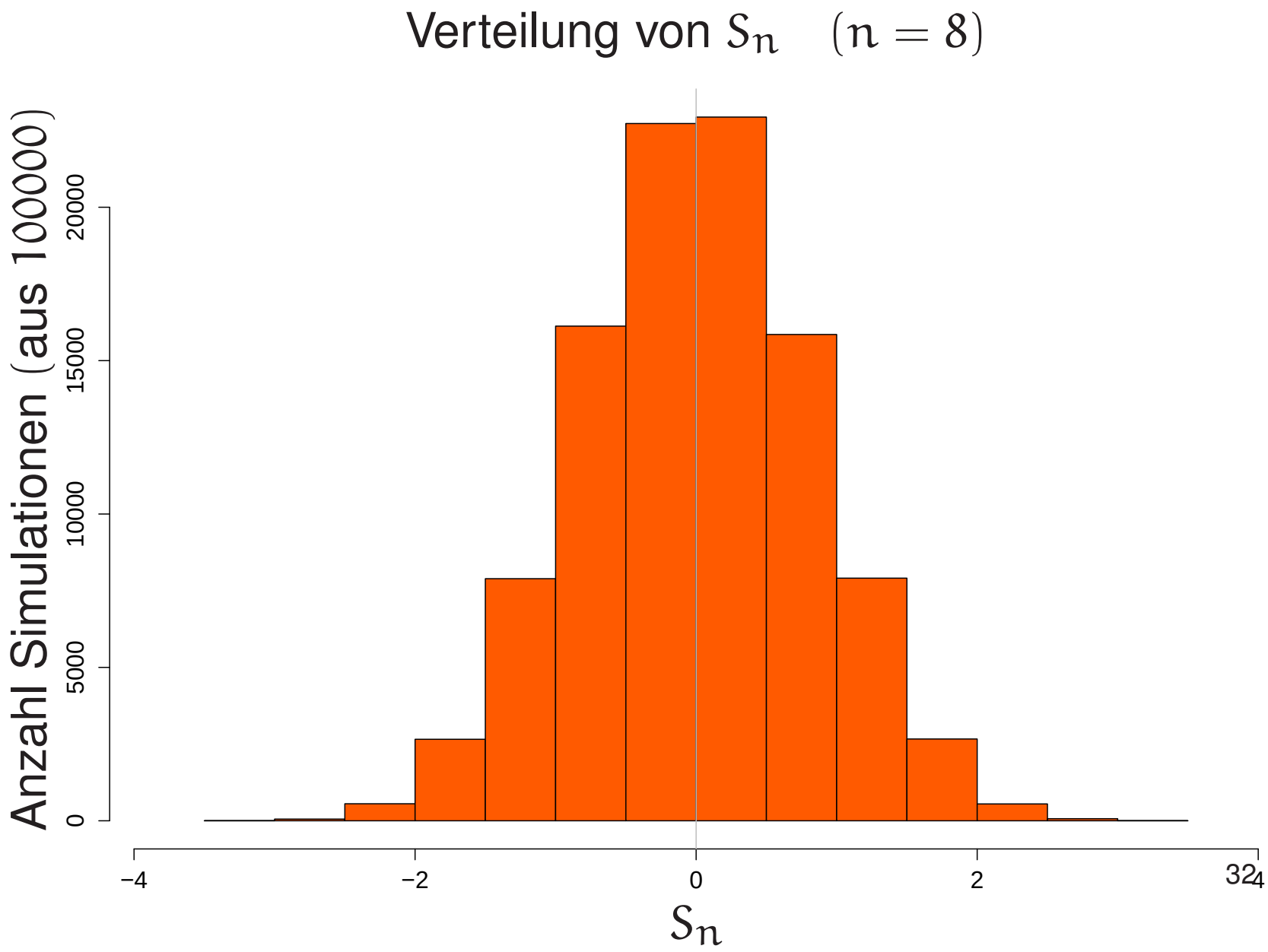

Verteilung von S_n $(n = 3)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
S_n

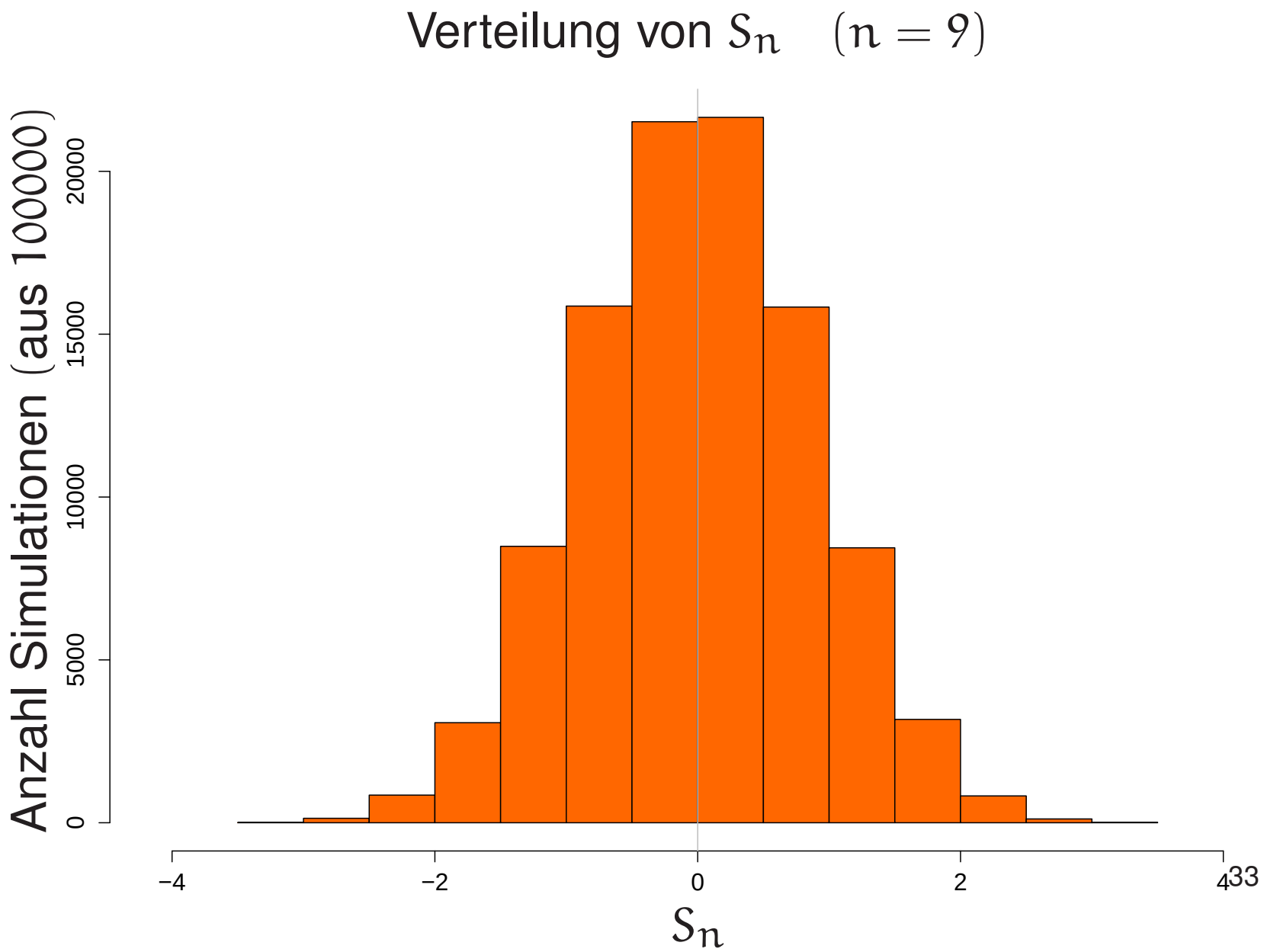

Verteilung von S_n $(n = 4)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
−2
−1
0
1
2
S_n

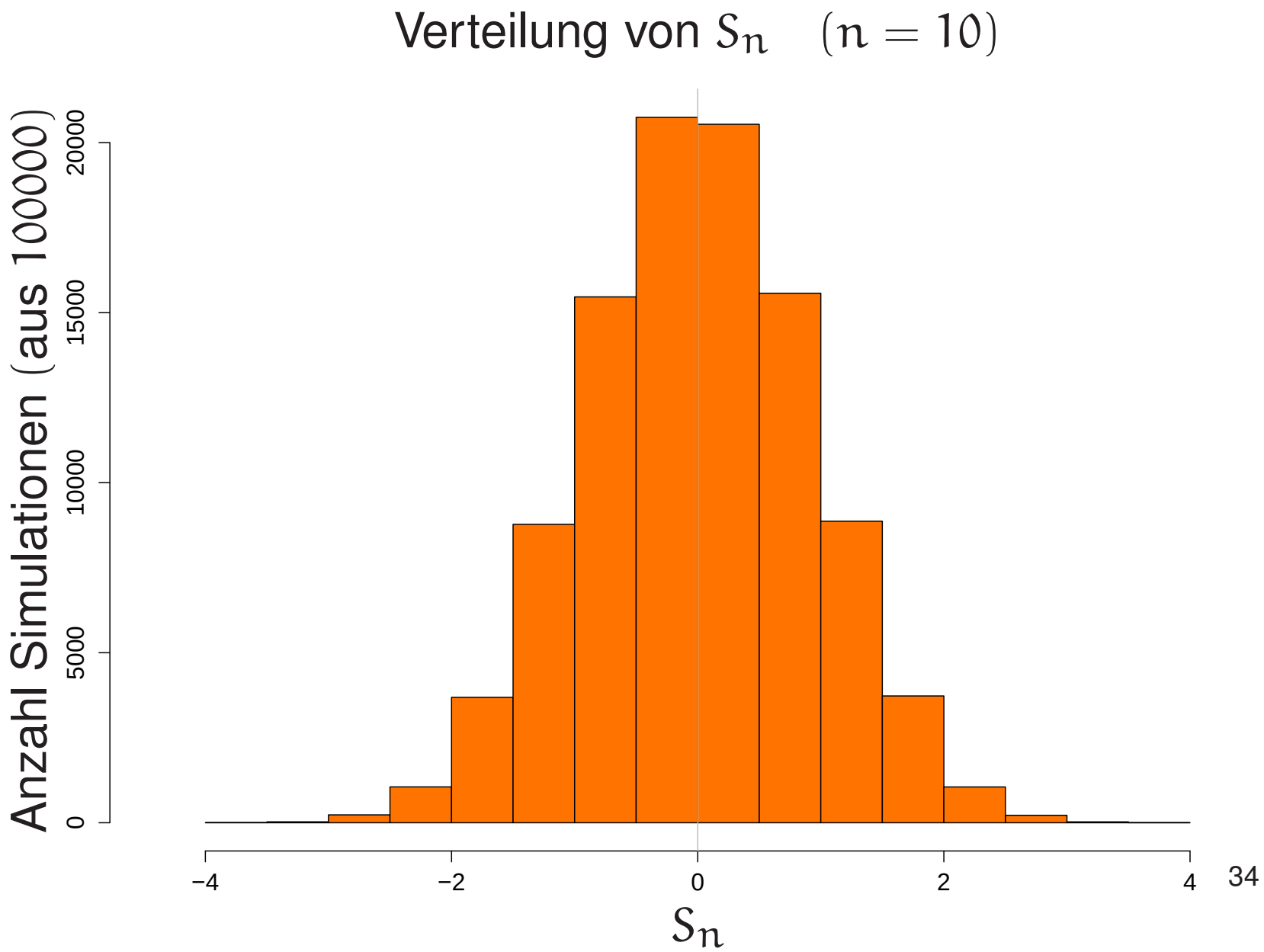

Verteilung von S_n $(n = 5)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
−2
−1
0
1
2
S_n

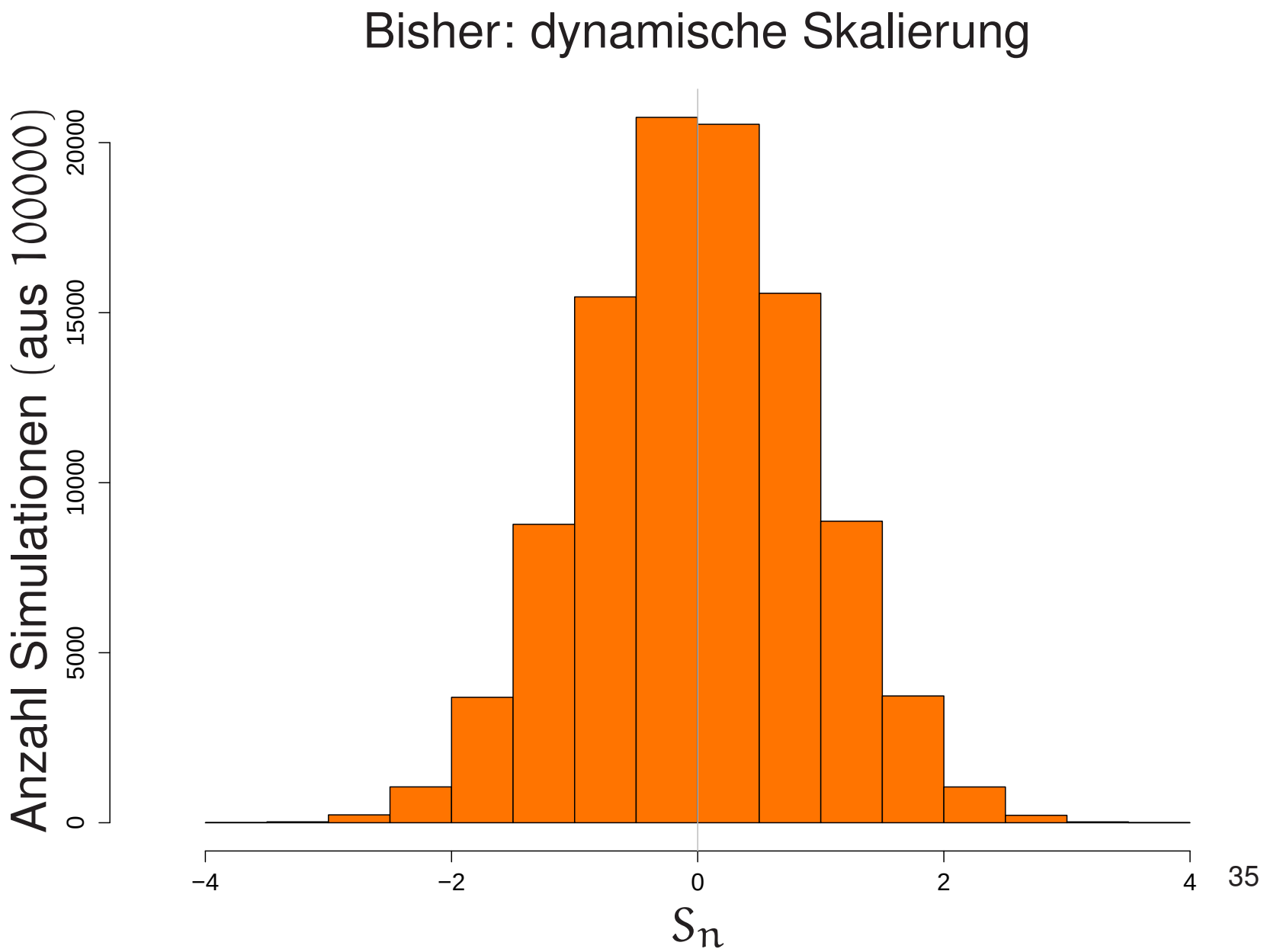

Verteilung von S_n $(n = 6)$
Anzahl Simulationen (aus 10000)
0
5000
10000
15000
20000
25000
−3
−2
−1
0
1
2
3
30
S_n

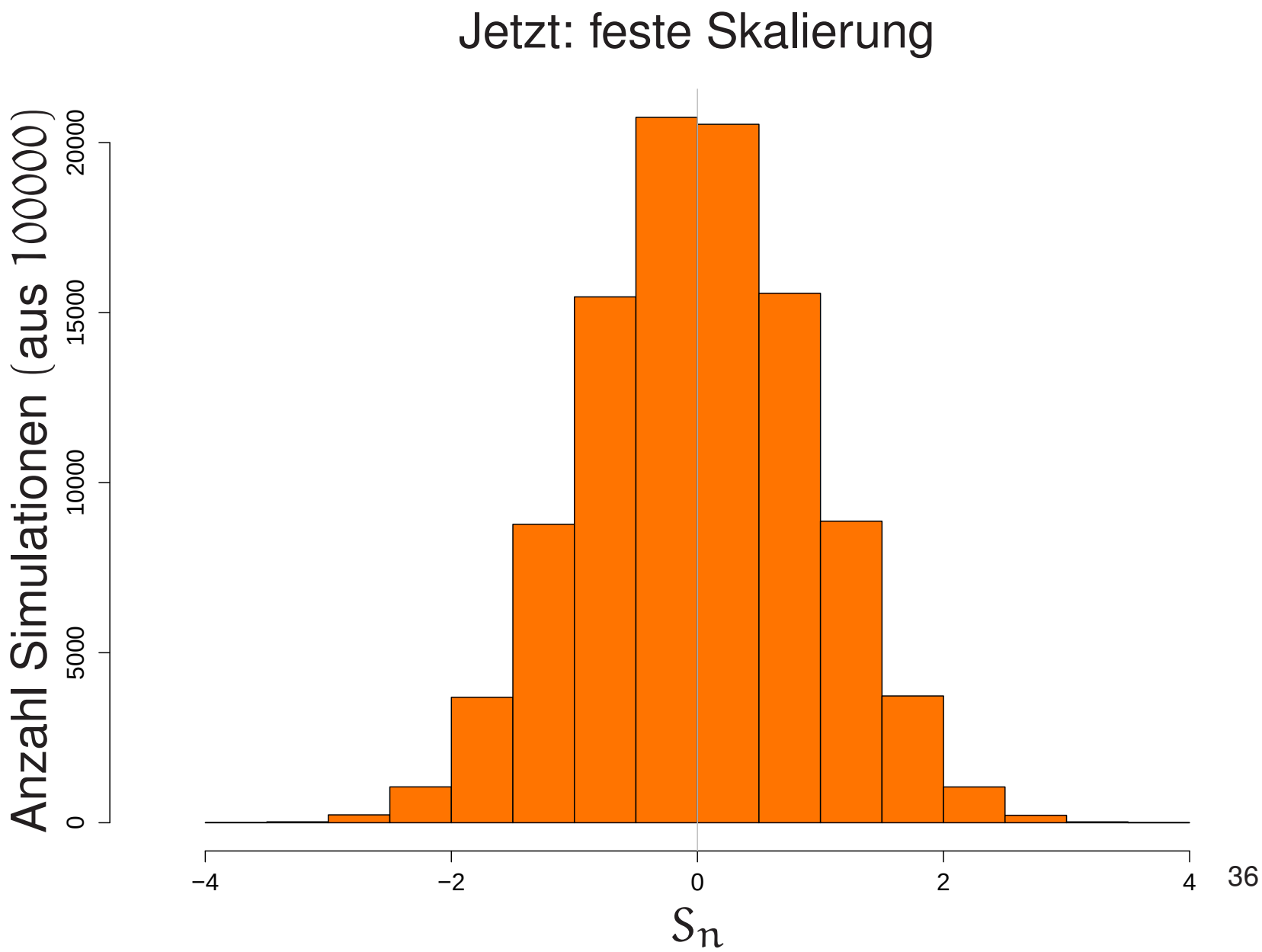

Verteilung von S_n $(n = 7)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
25000
−3
−2
−1
0
1
2
3
S_n

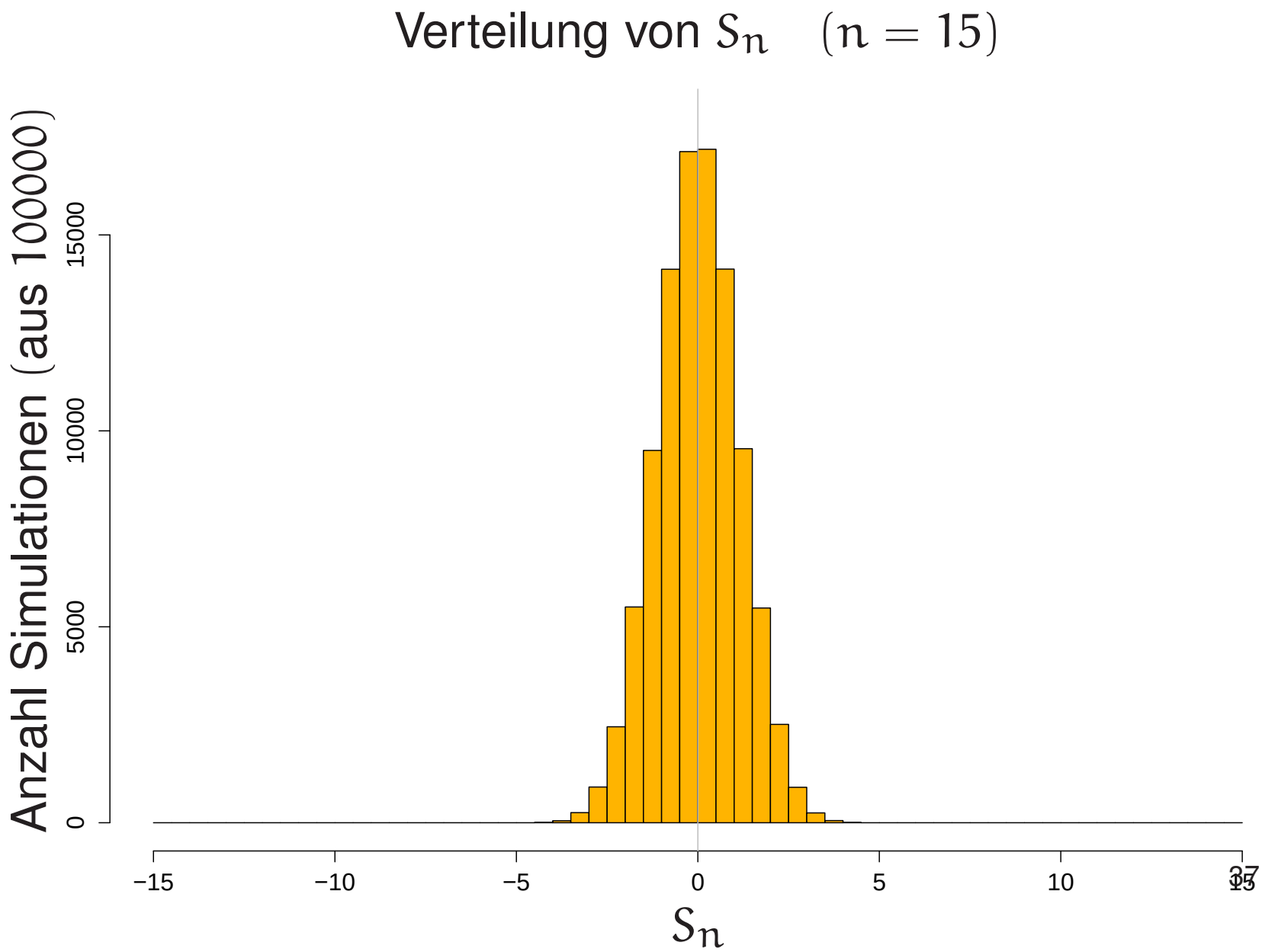

Verteilung von S_n $(n = 8)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n

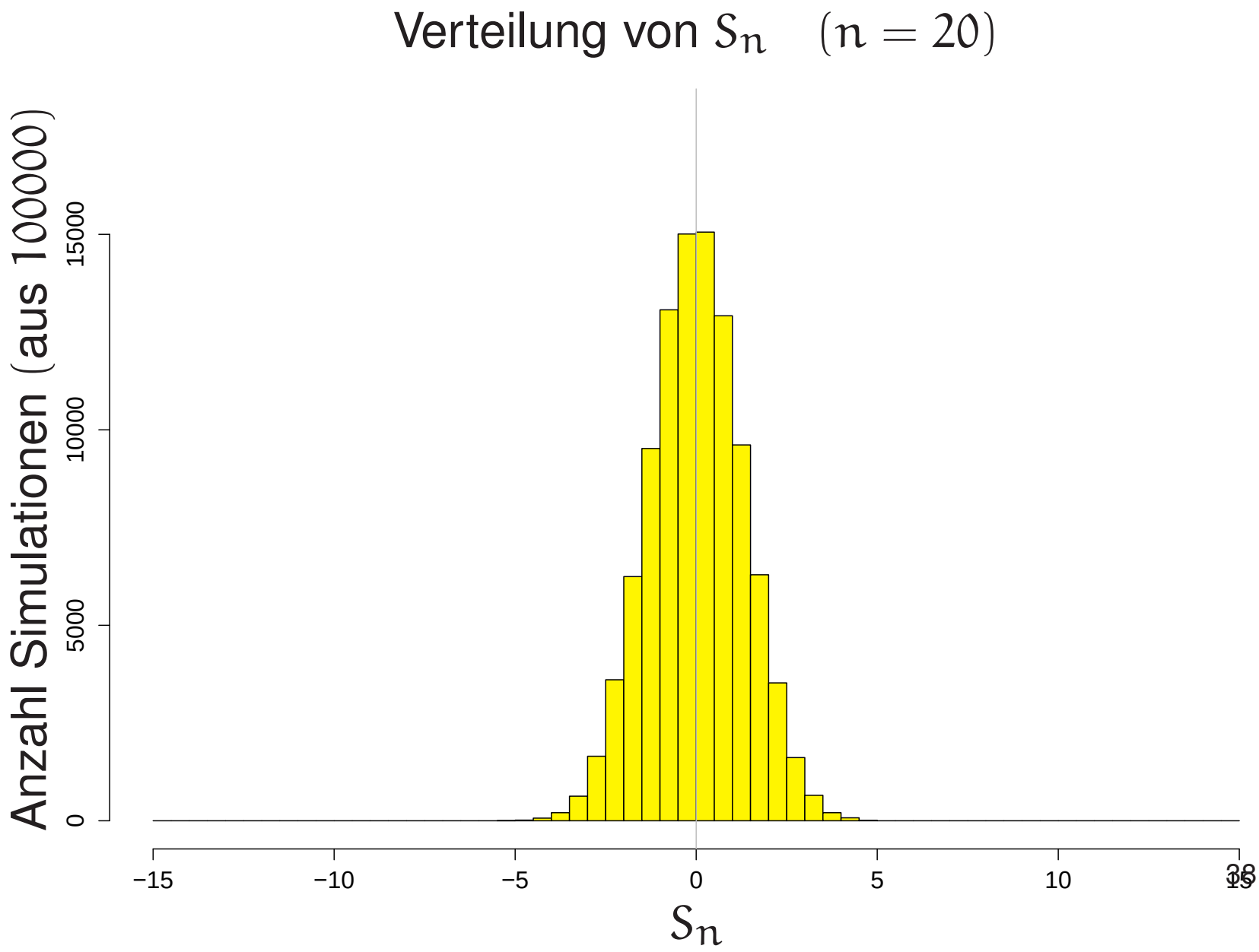

Verteilung von S_n $(n = 9)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n
33

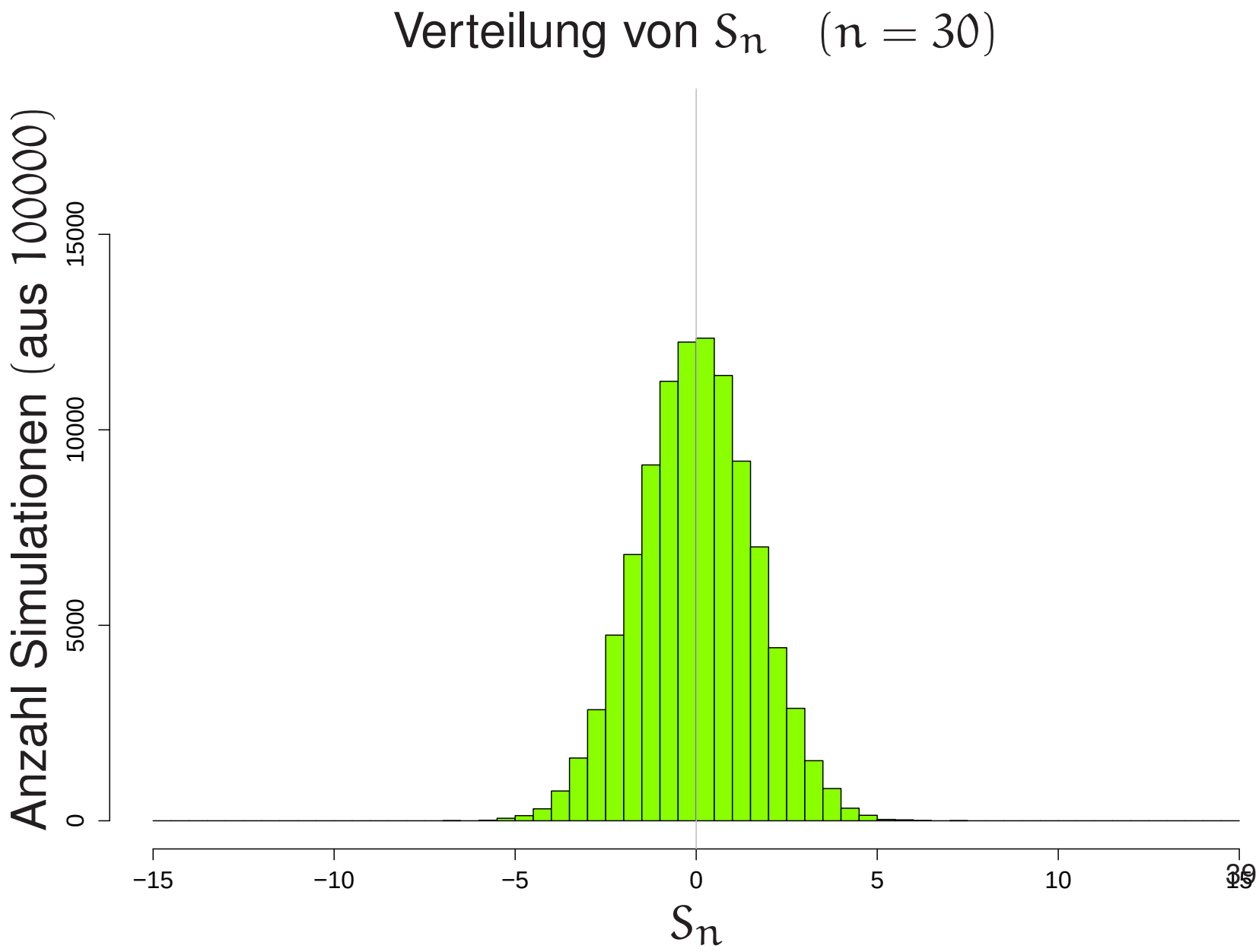

Verteilung von S_n $(n = 10)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n

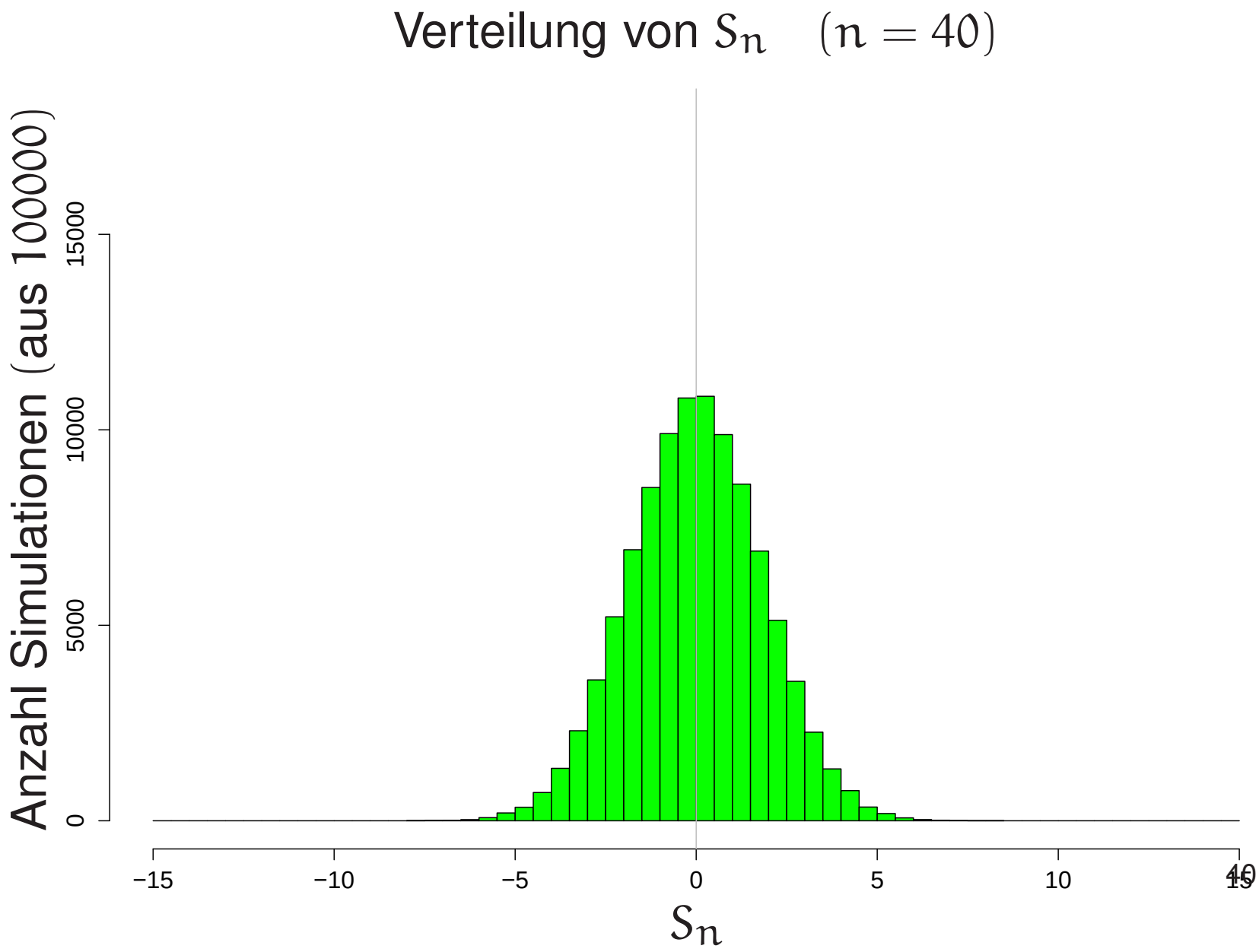

Bisher: dynamische Skalierung
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
35
S_n

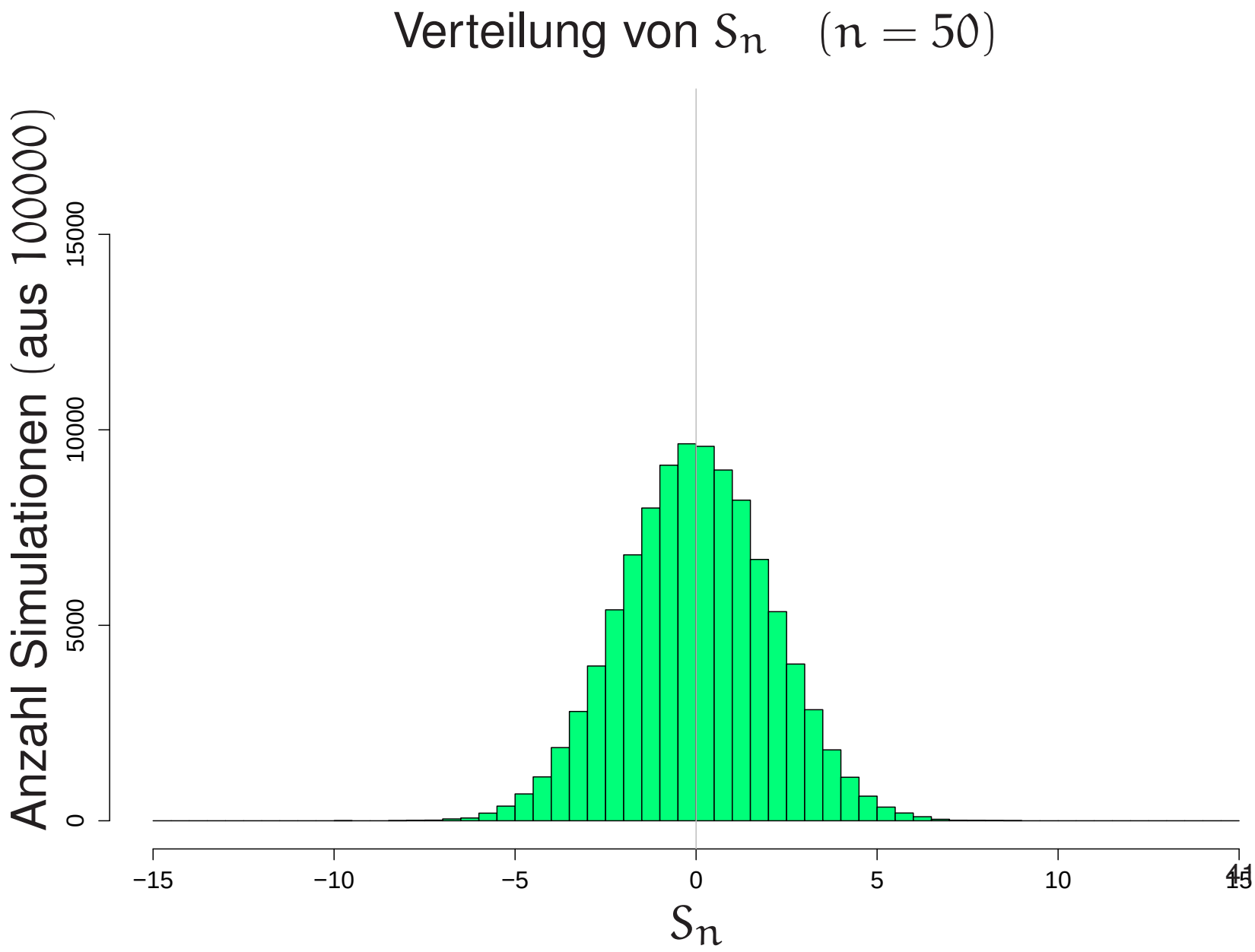

Jetzt: feste Skalierung
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n

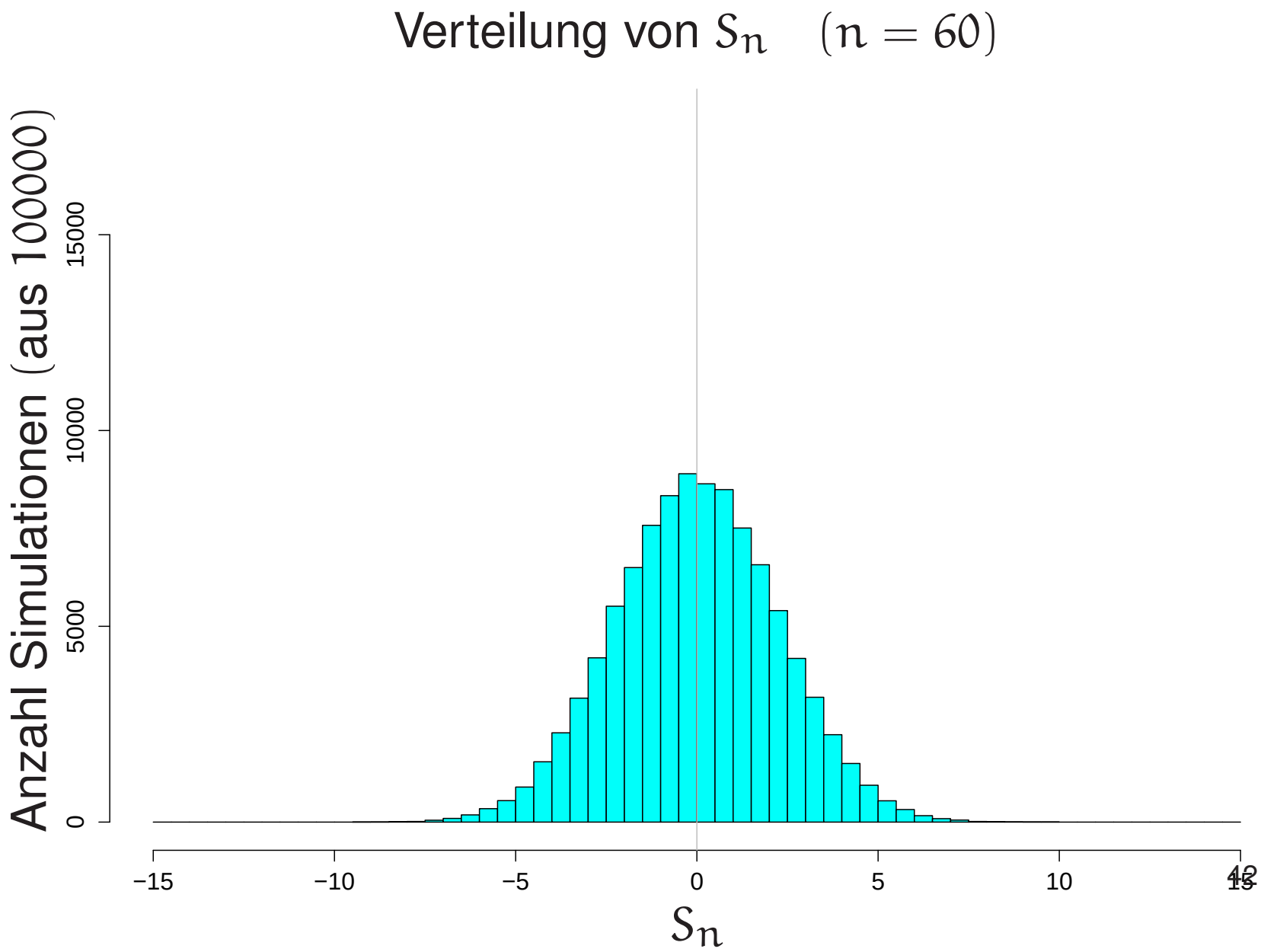

Verteilung von S_n $(n = 15)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

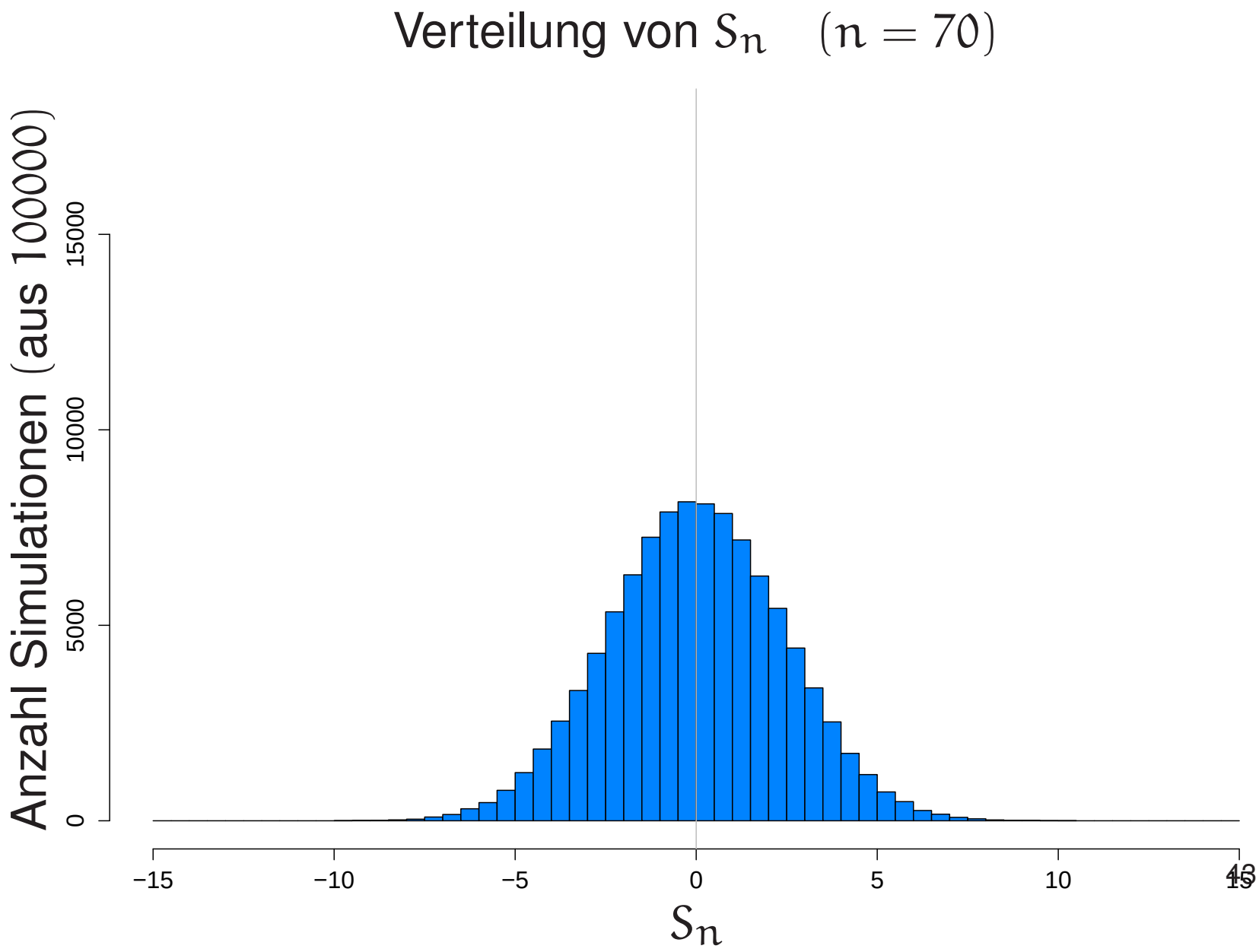

Verteilung von S_n $(n = 20)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

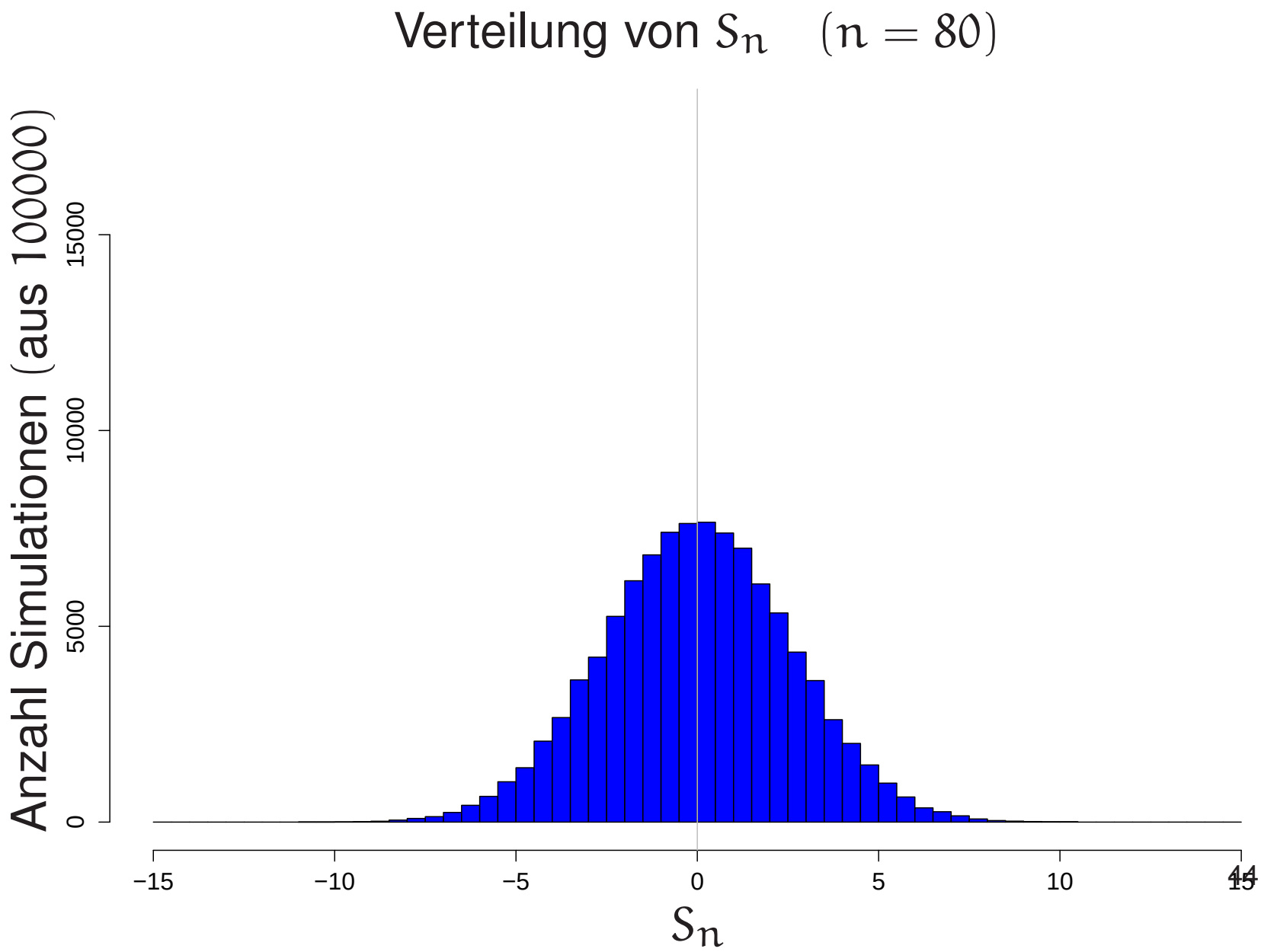

Verteilung von S_n $(n = 30)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

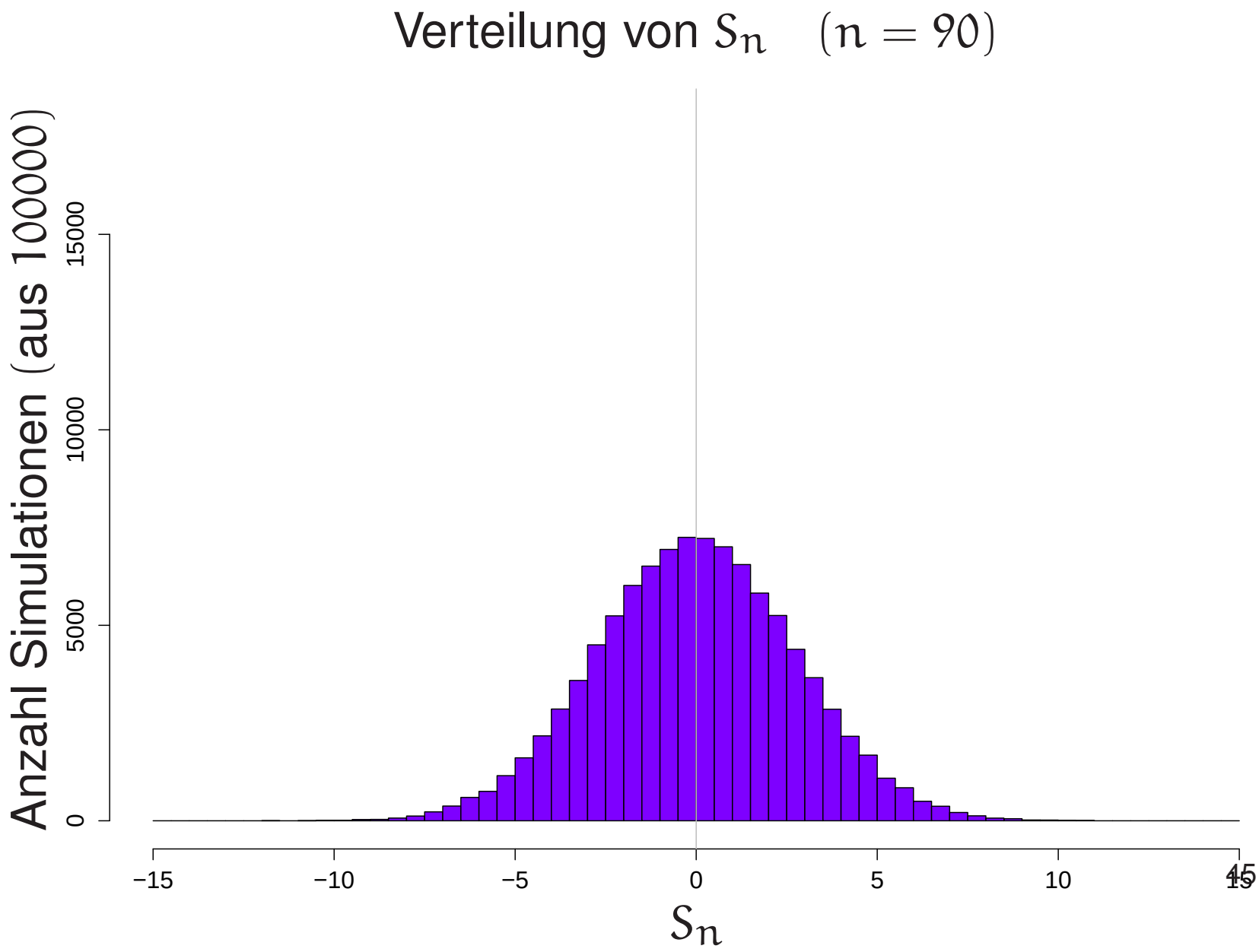

Verteilung von S_n $(n = 40)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
40
S_n

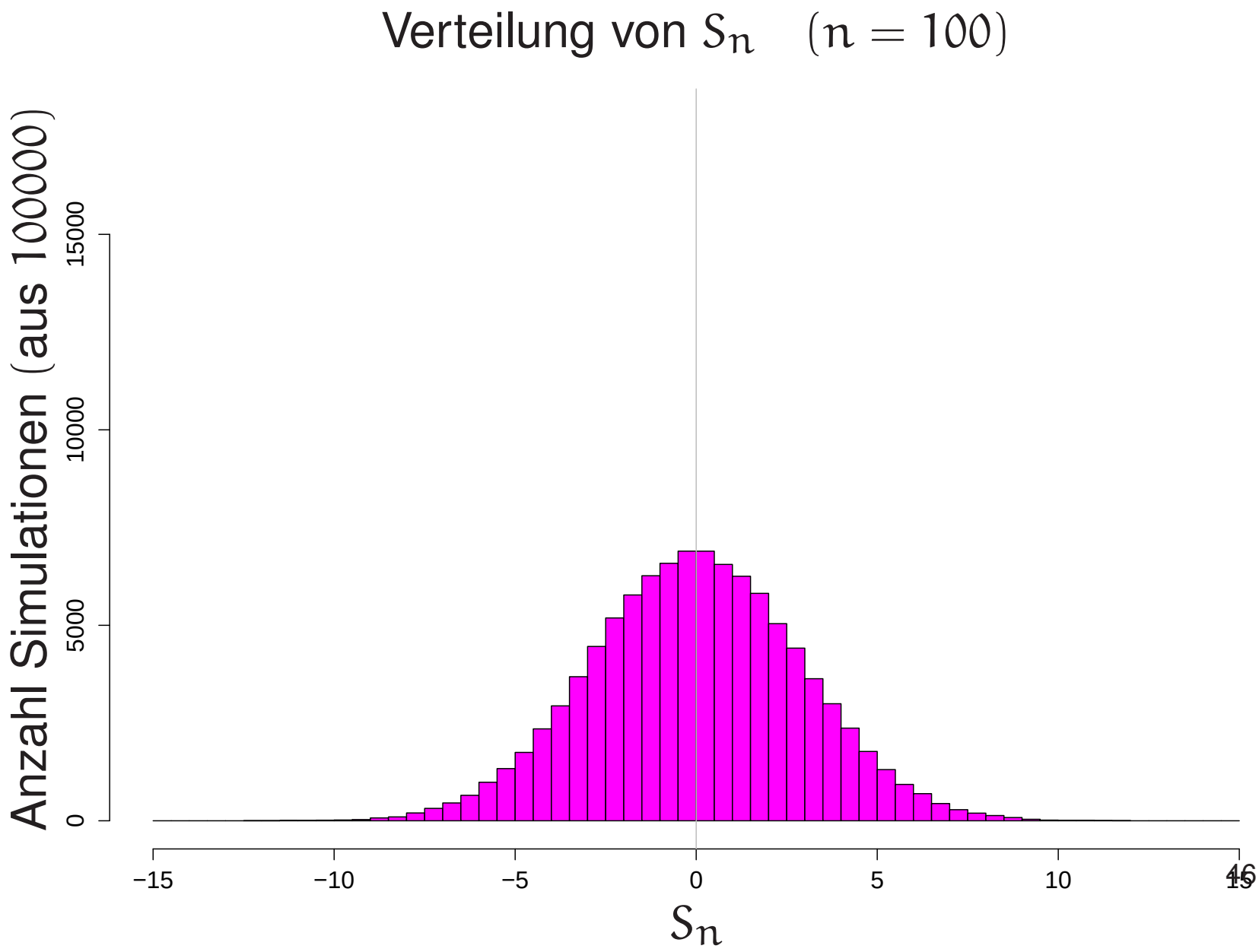

Verteilung von S_n $(n = 50)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n


Verteilung von S_n $(n = 60)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

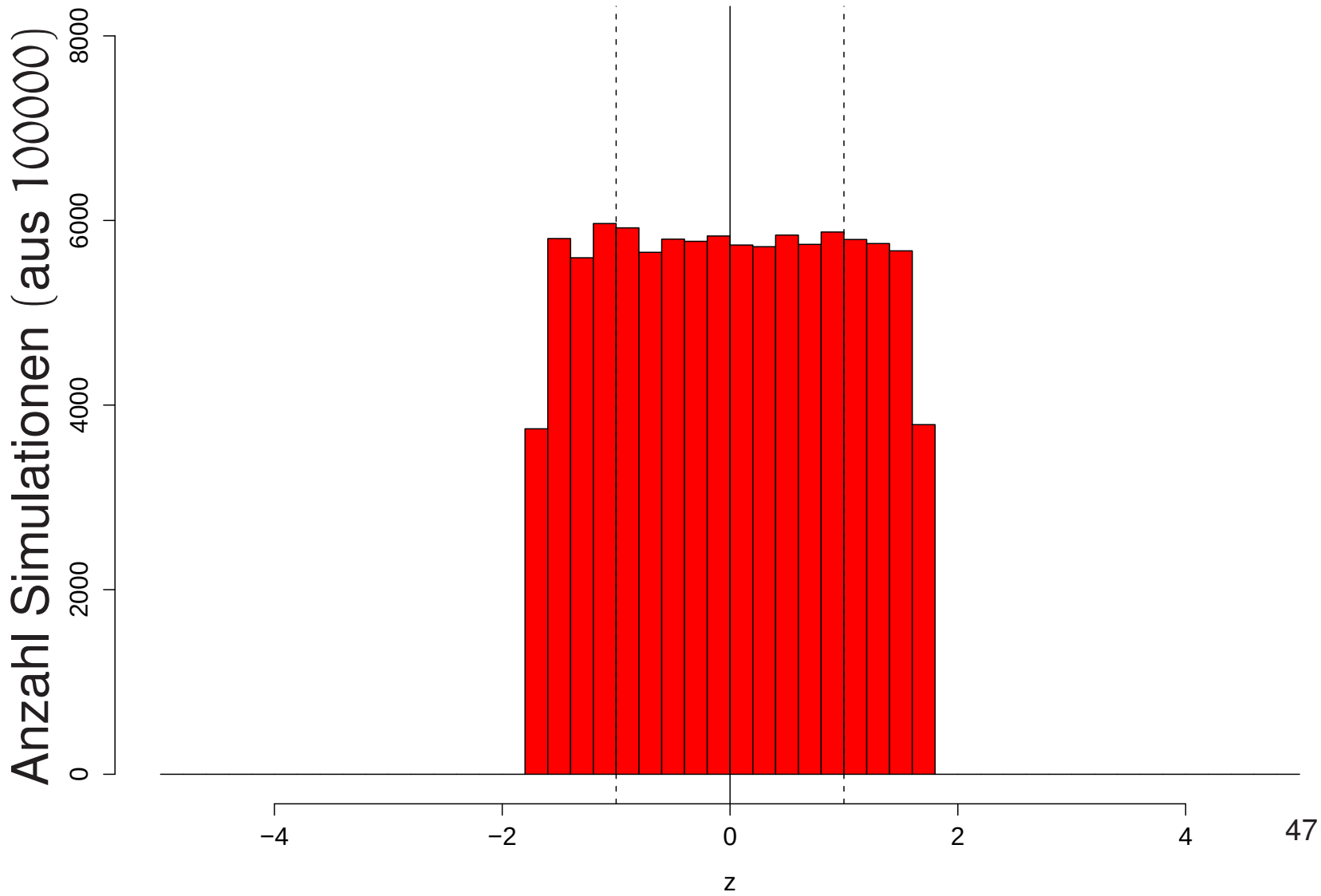

Verteilung von S_n $(n = 70)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n


Verteilung von S_n $(n = 80)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

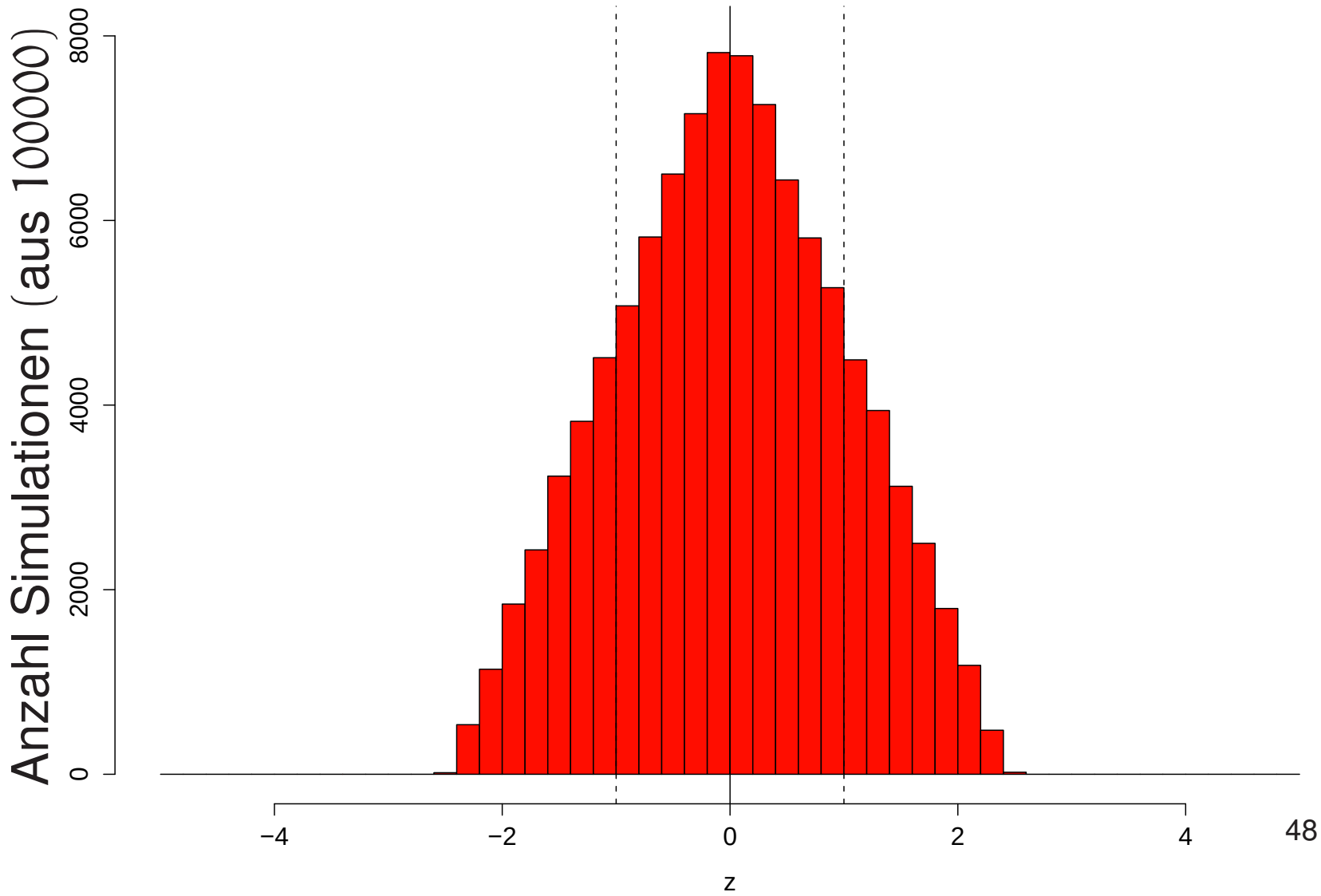

Verteilung von S_n $(n = 90)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n


Verteilung von S_n $(n = 100)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

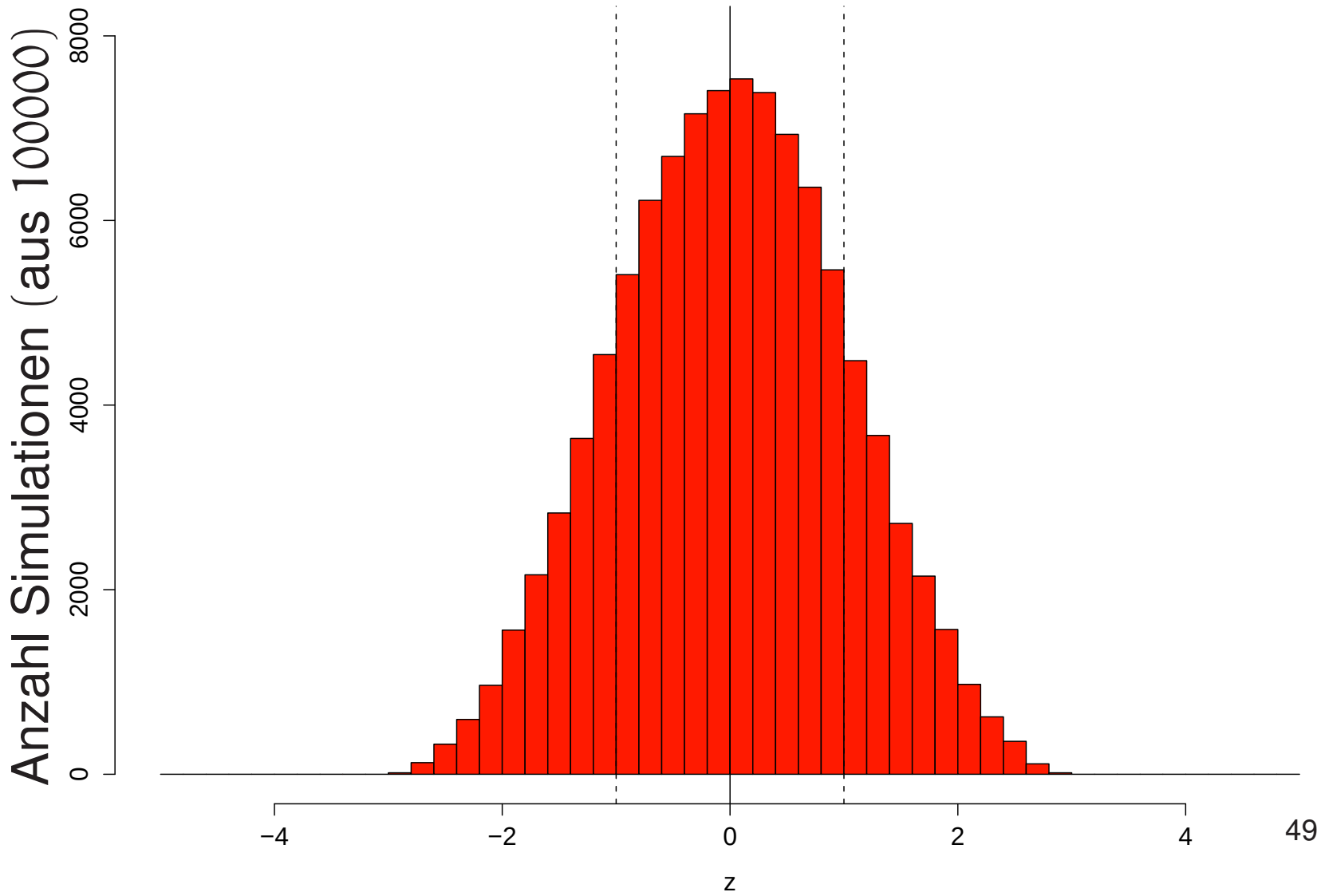
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 1)$



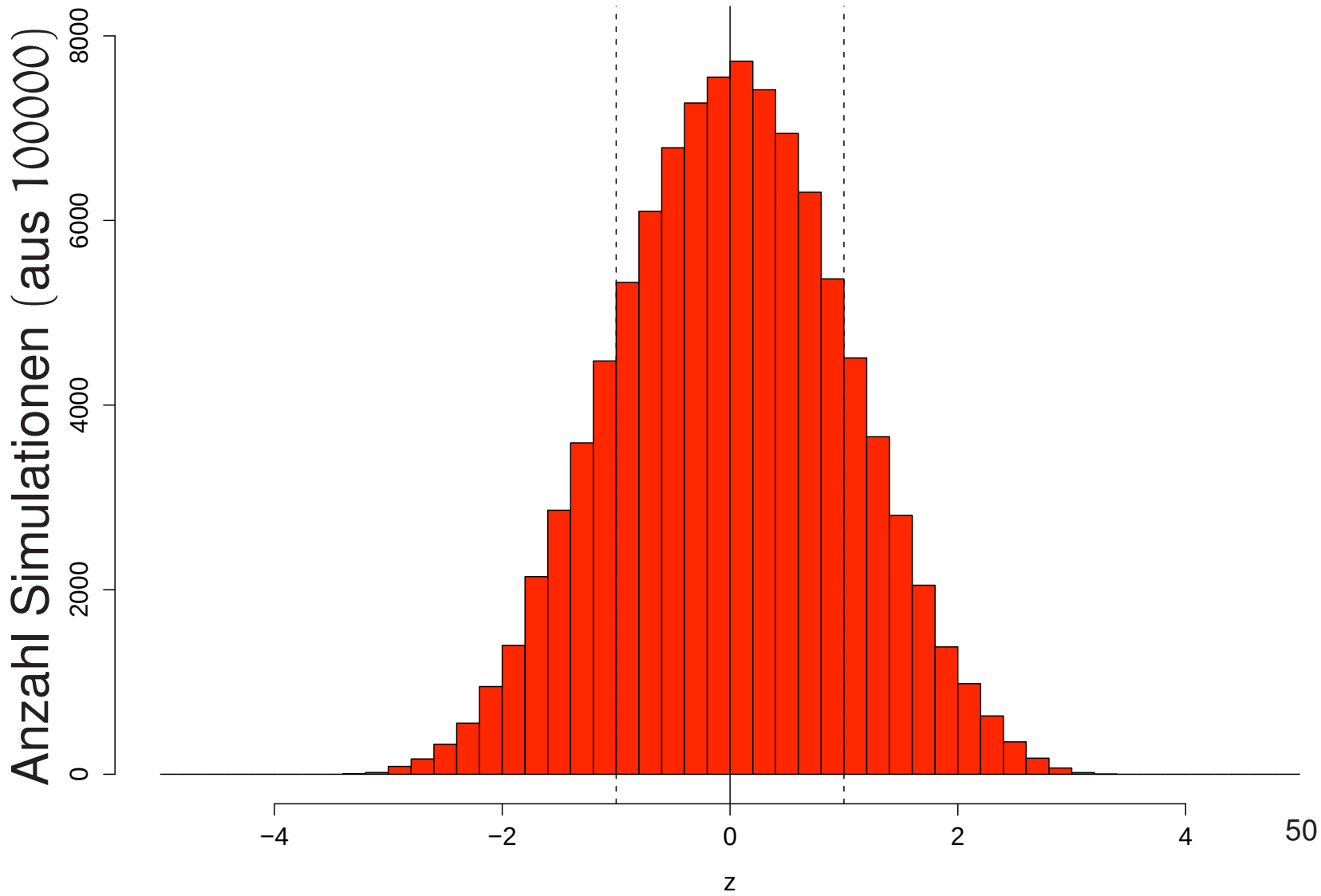
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 2)$



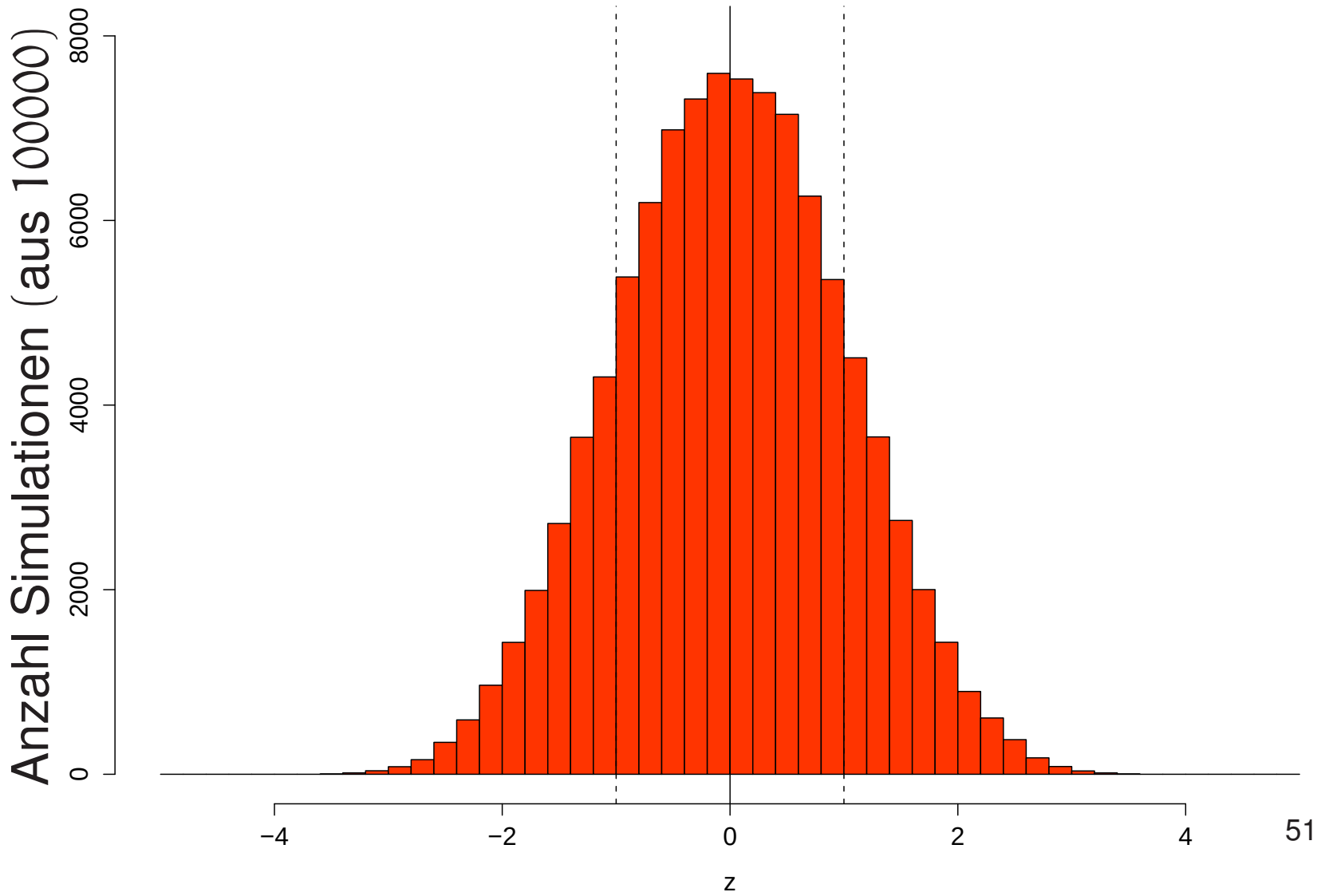
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 3)$



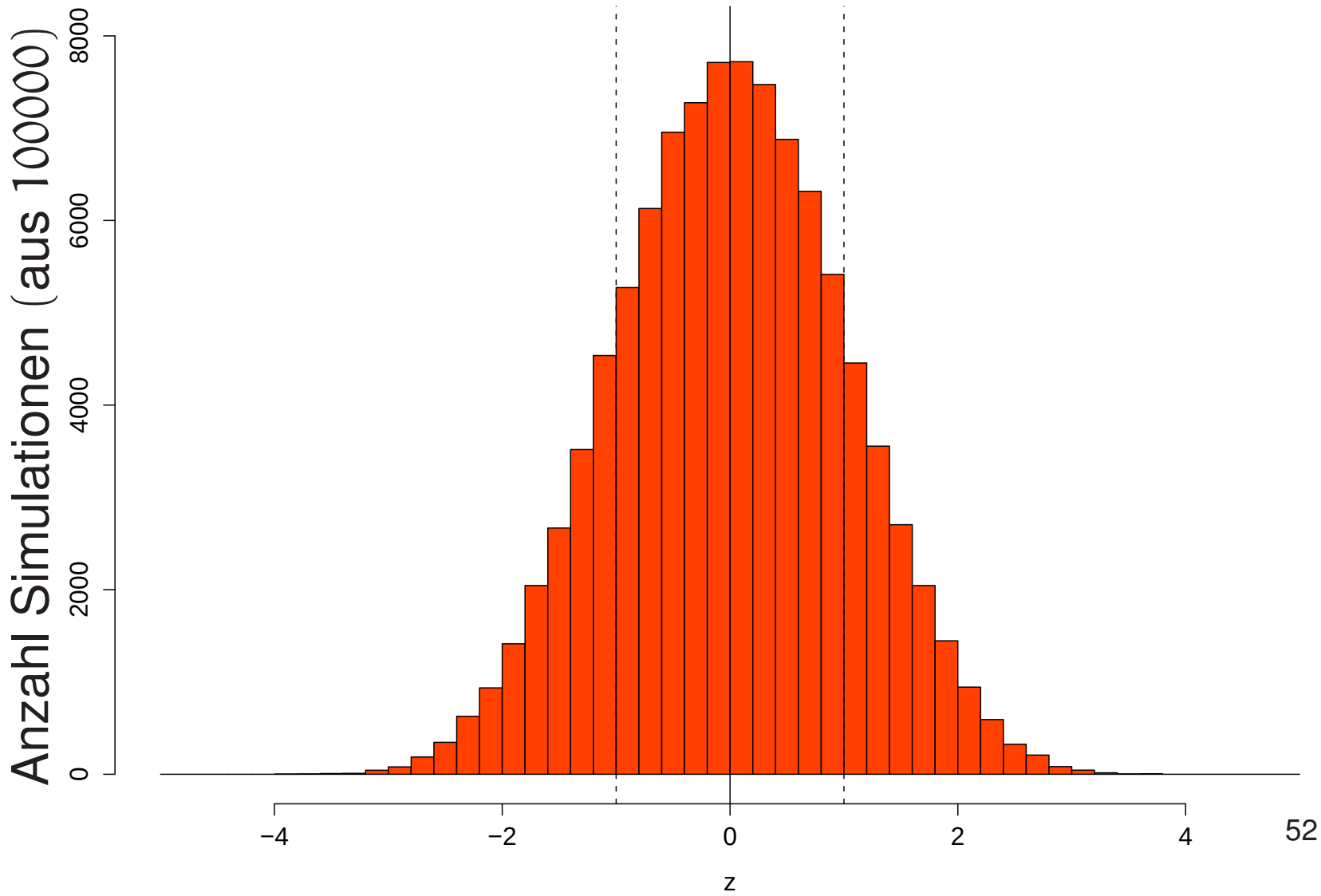
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 4)$



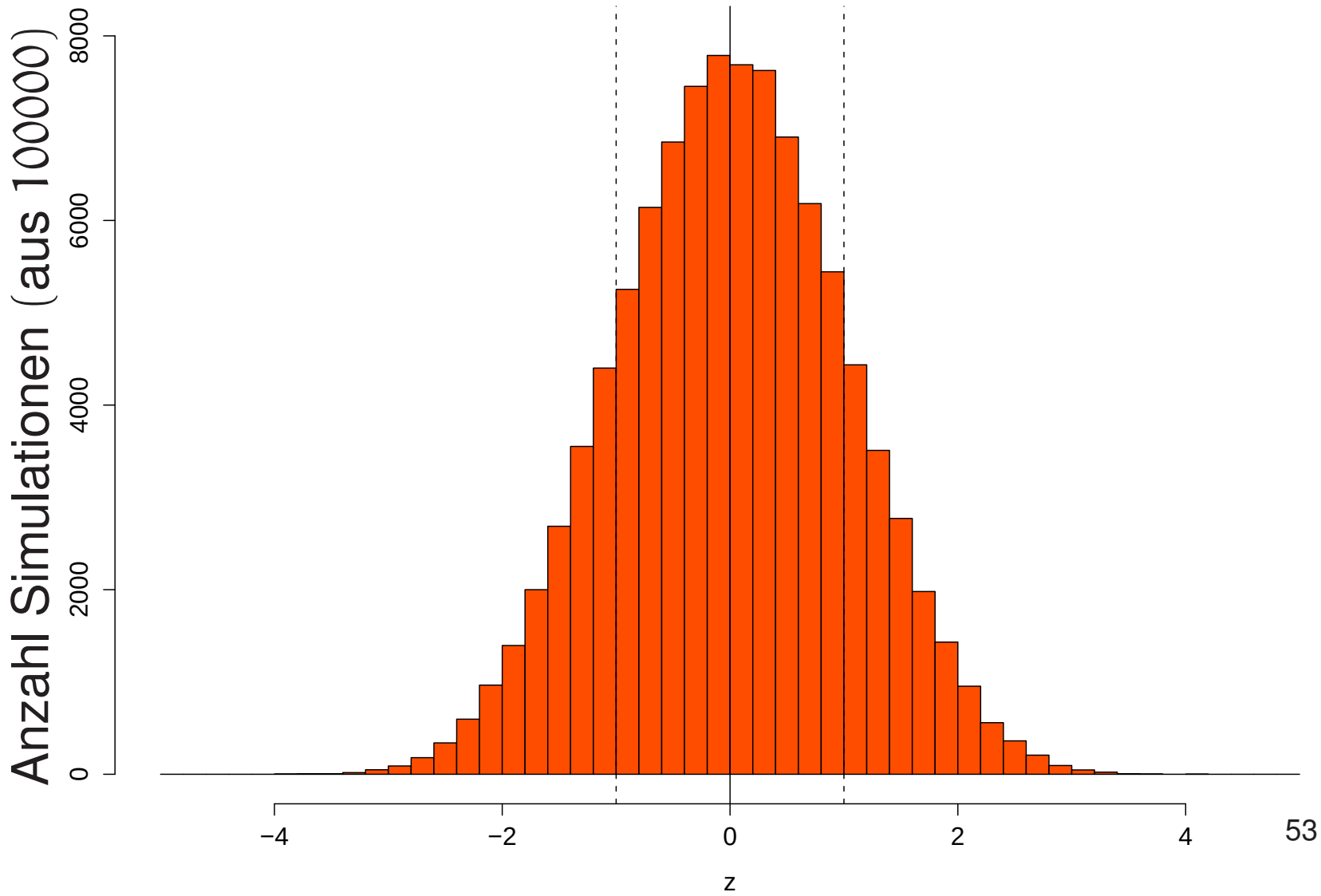
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 5)$



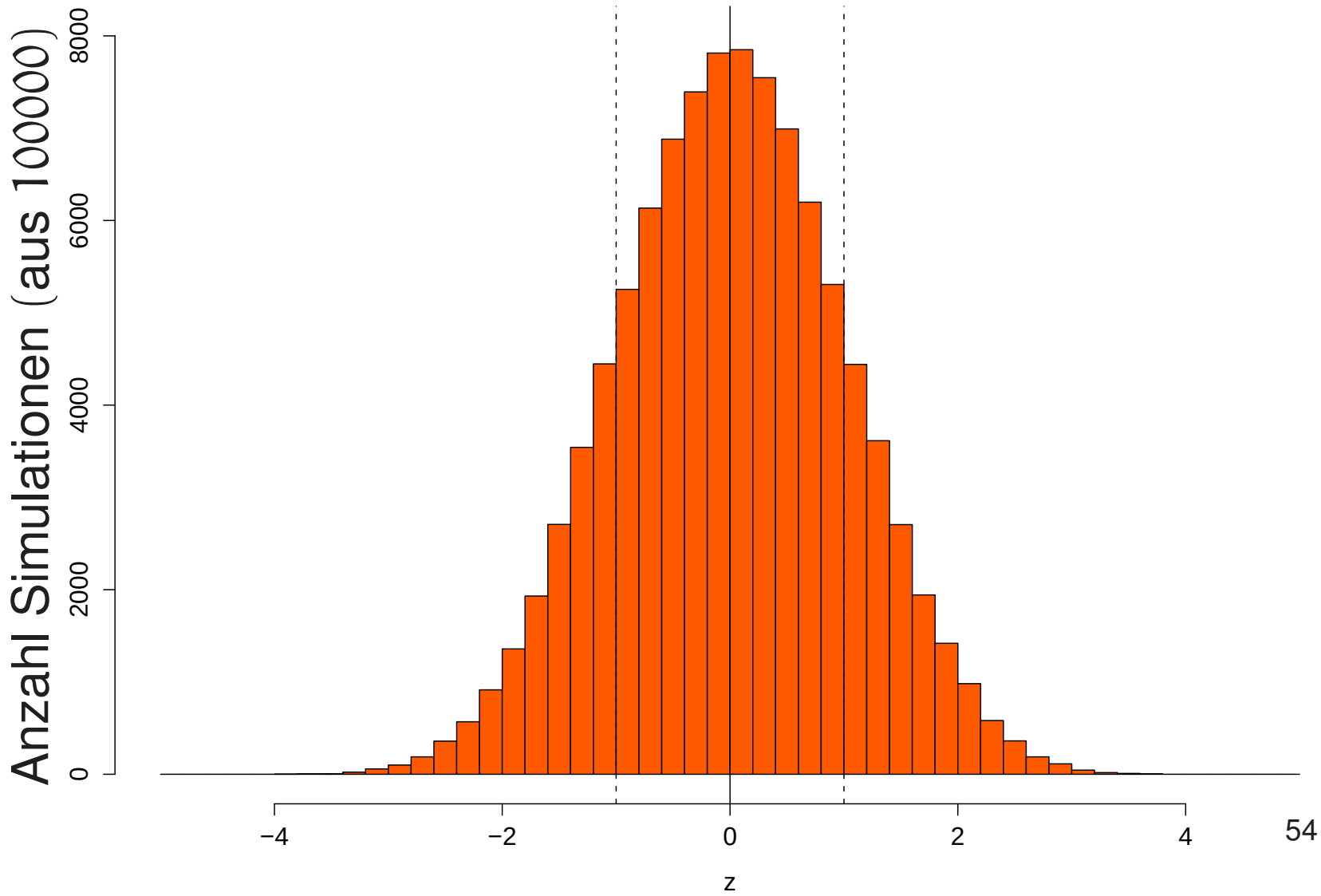
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 6)$



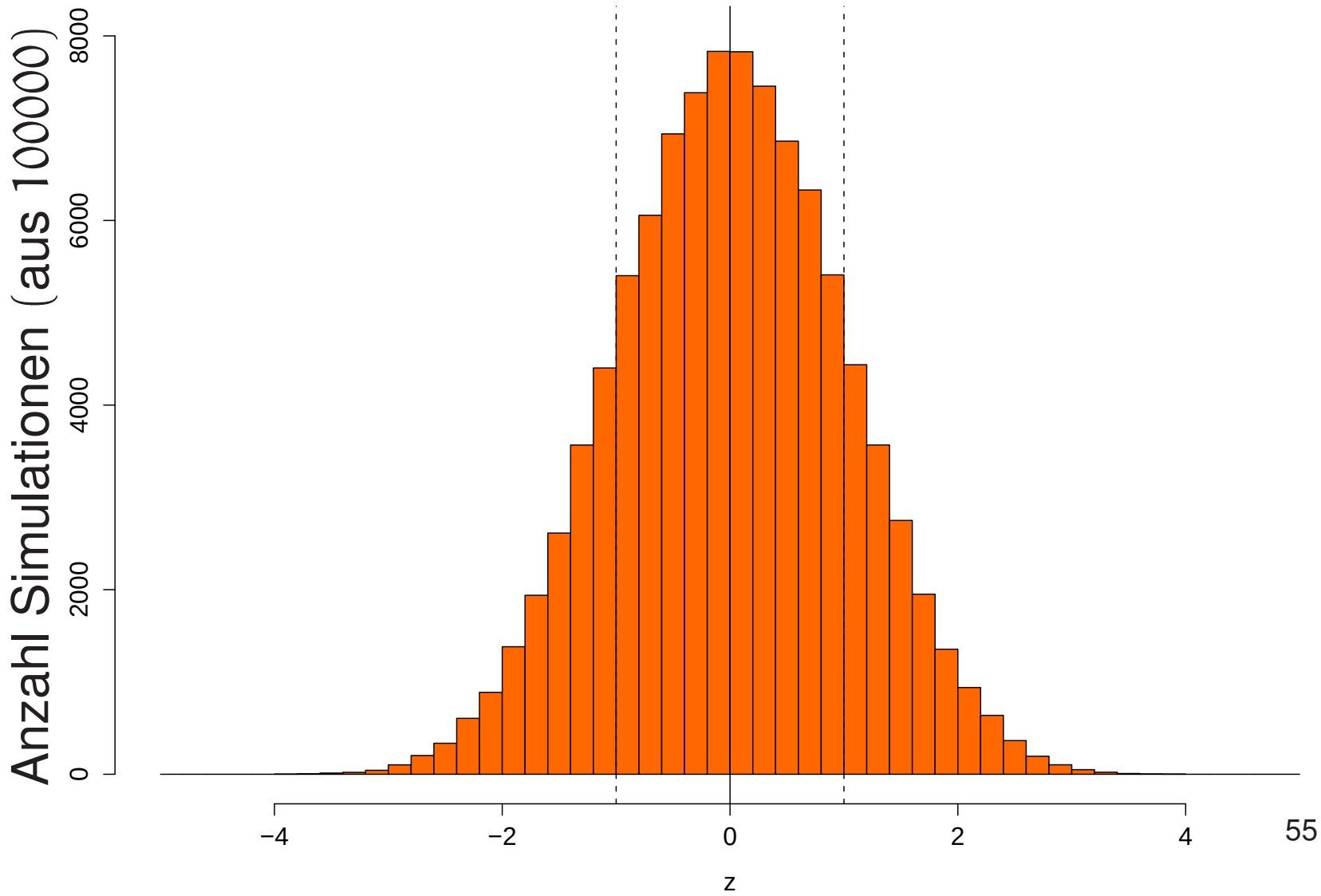
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 7)$



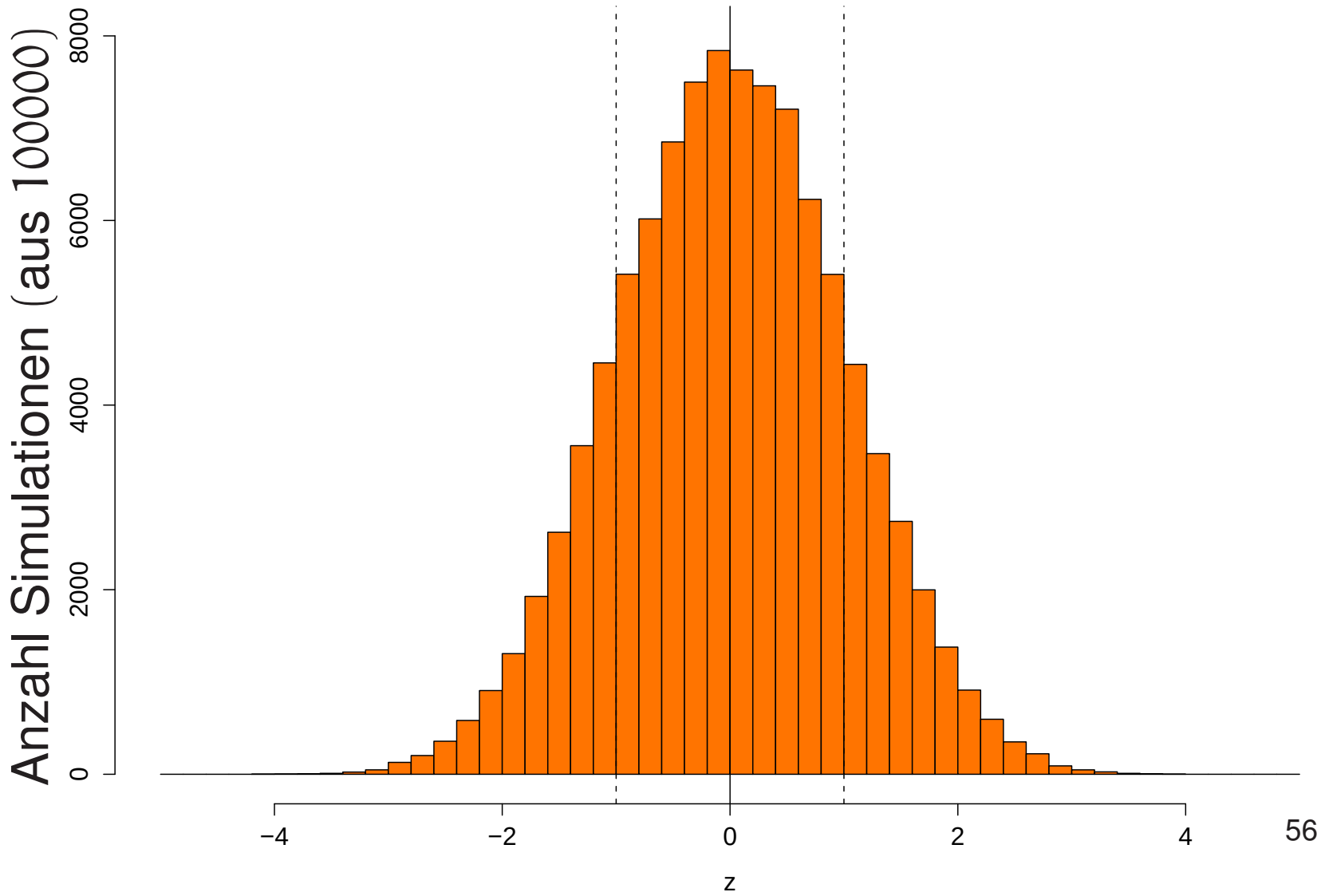
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 8)$



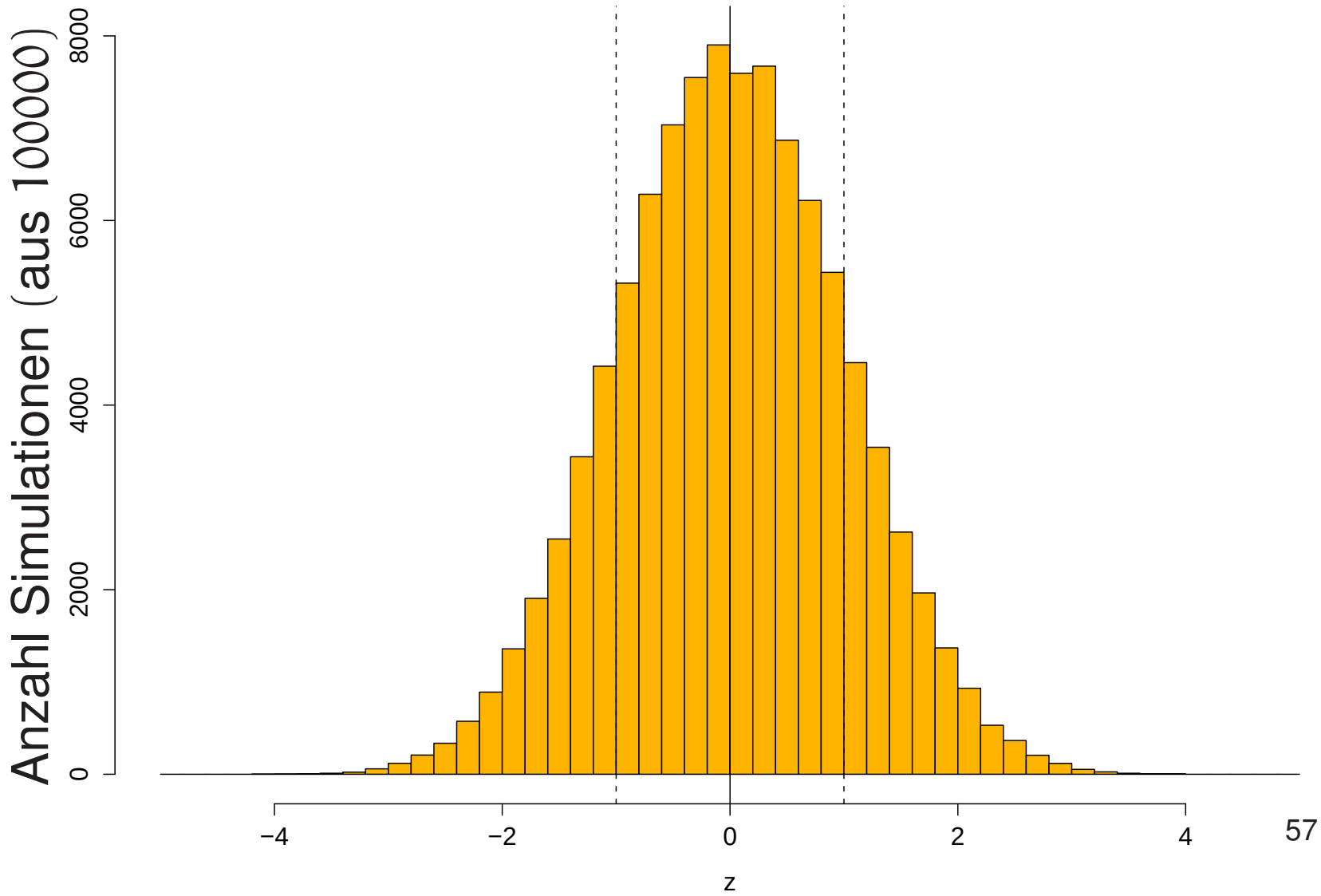
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 9)$



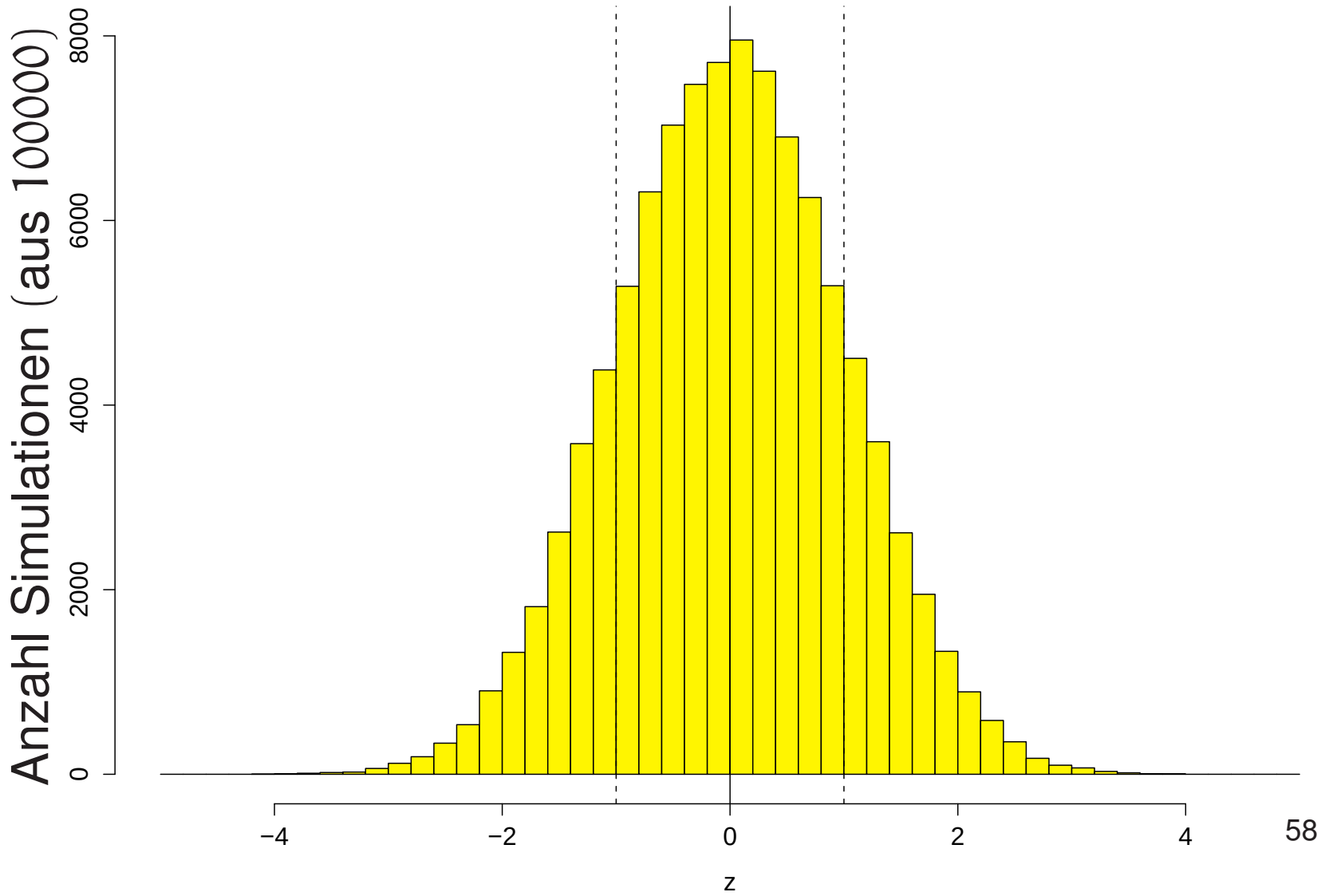
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 10)$



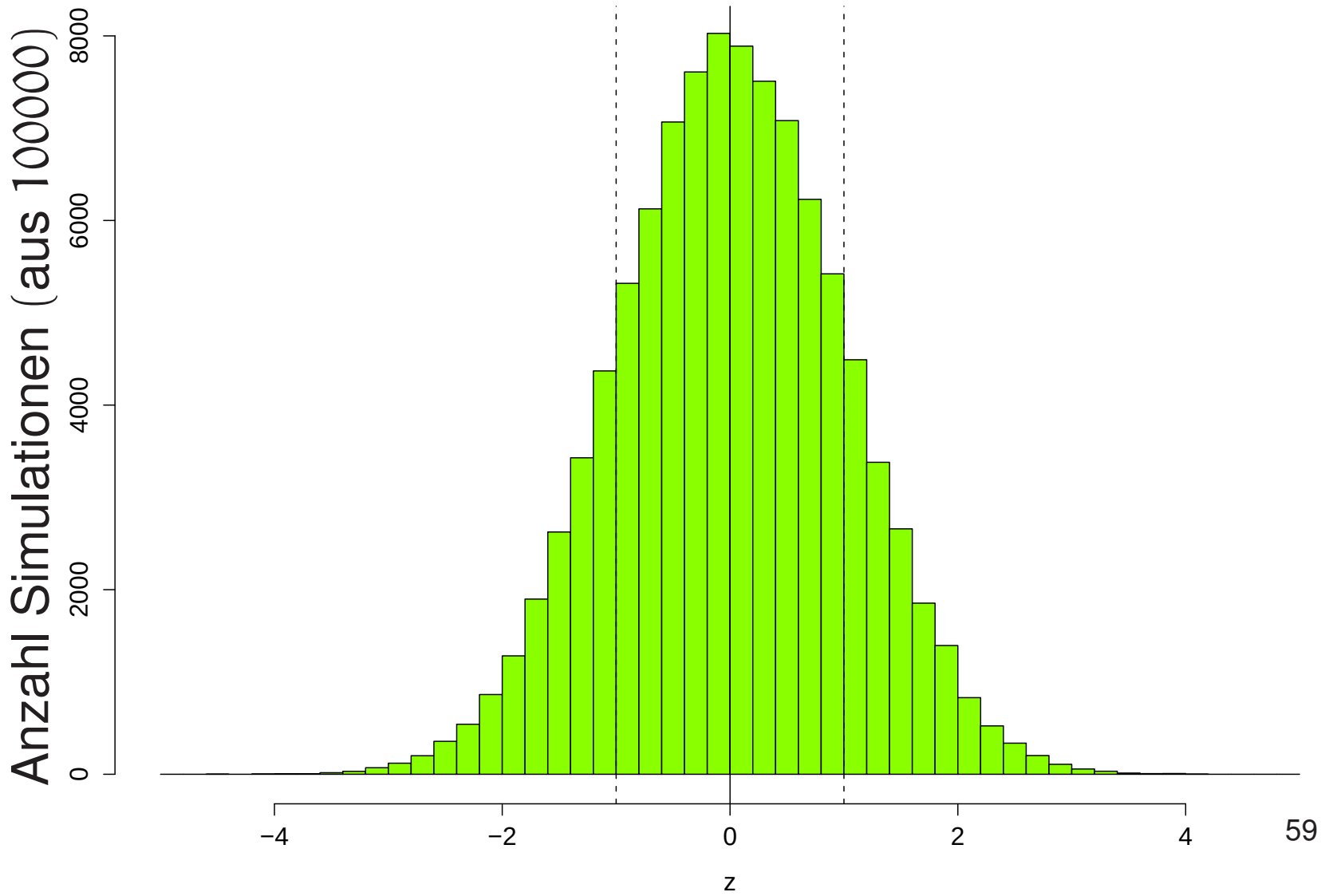
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 15)$



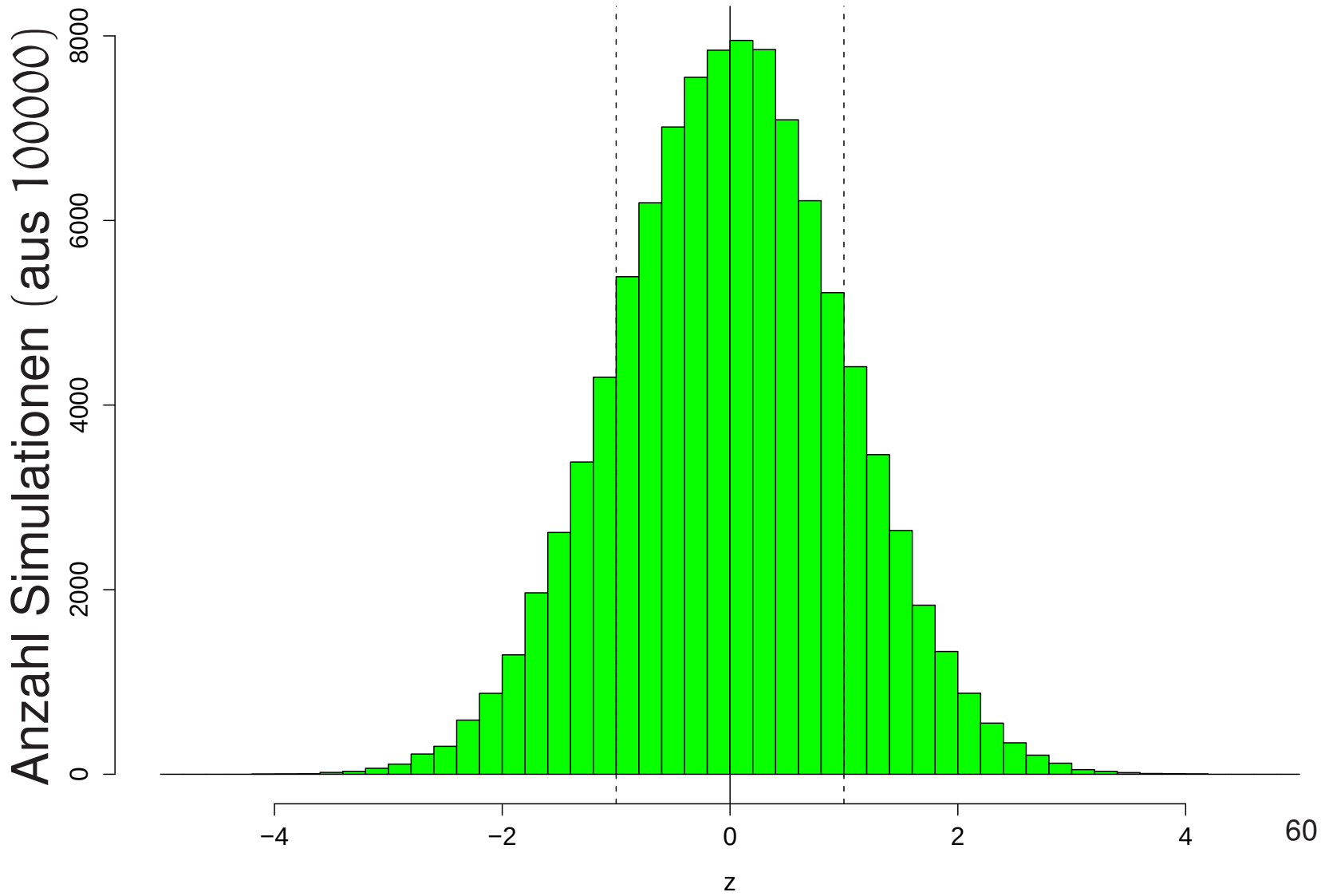
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 20)$



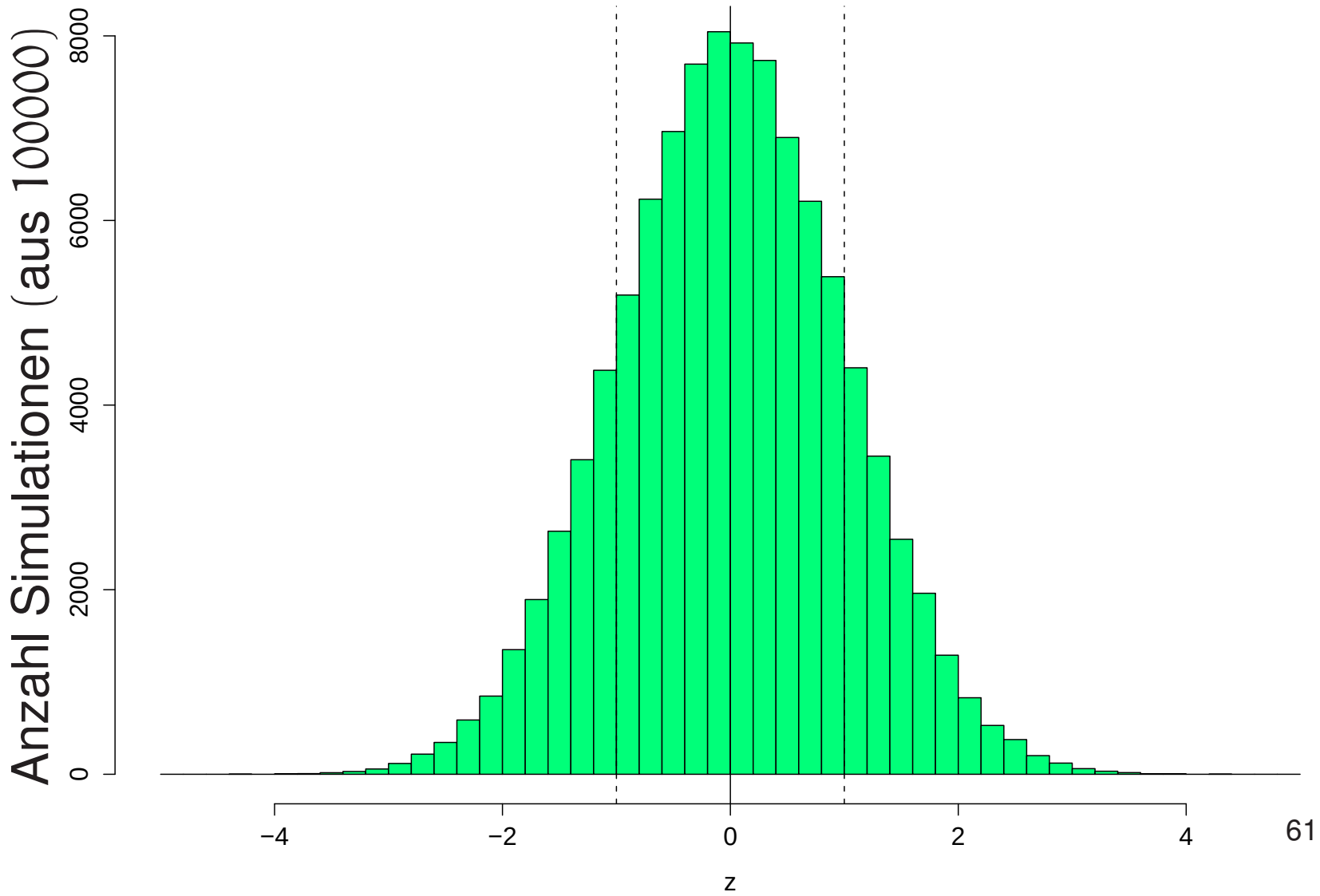
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 30)$



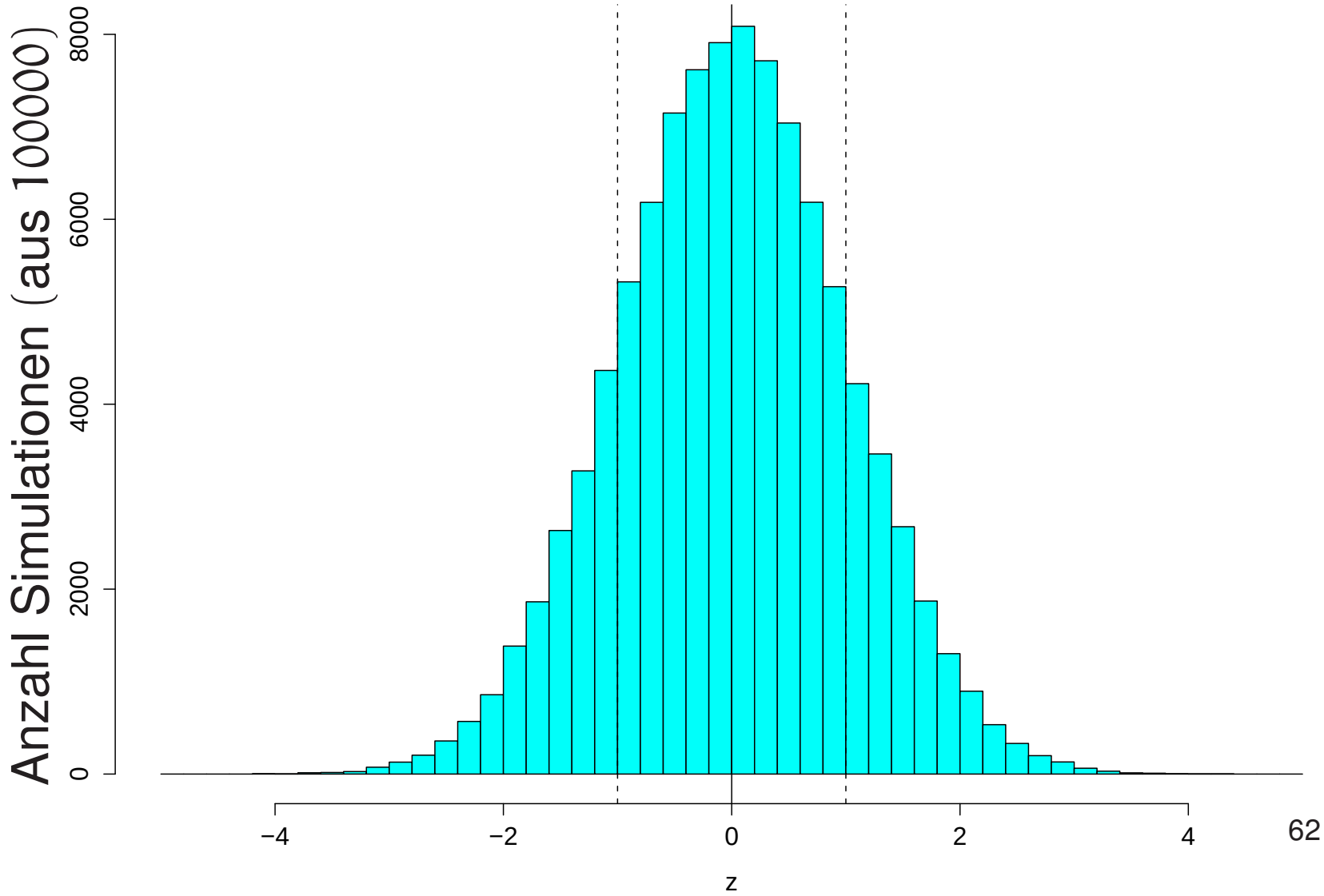
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 40)$



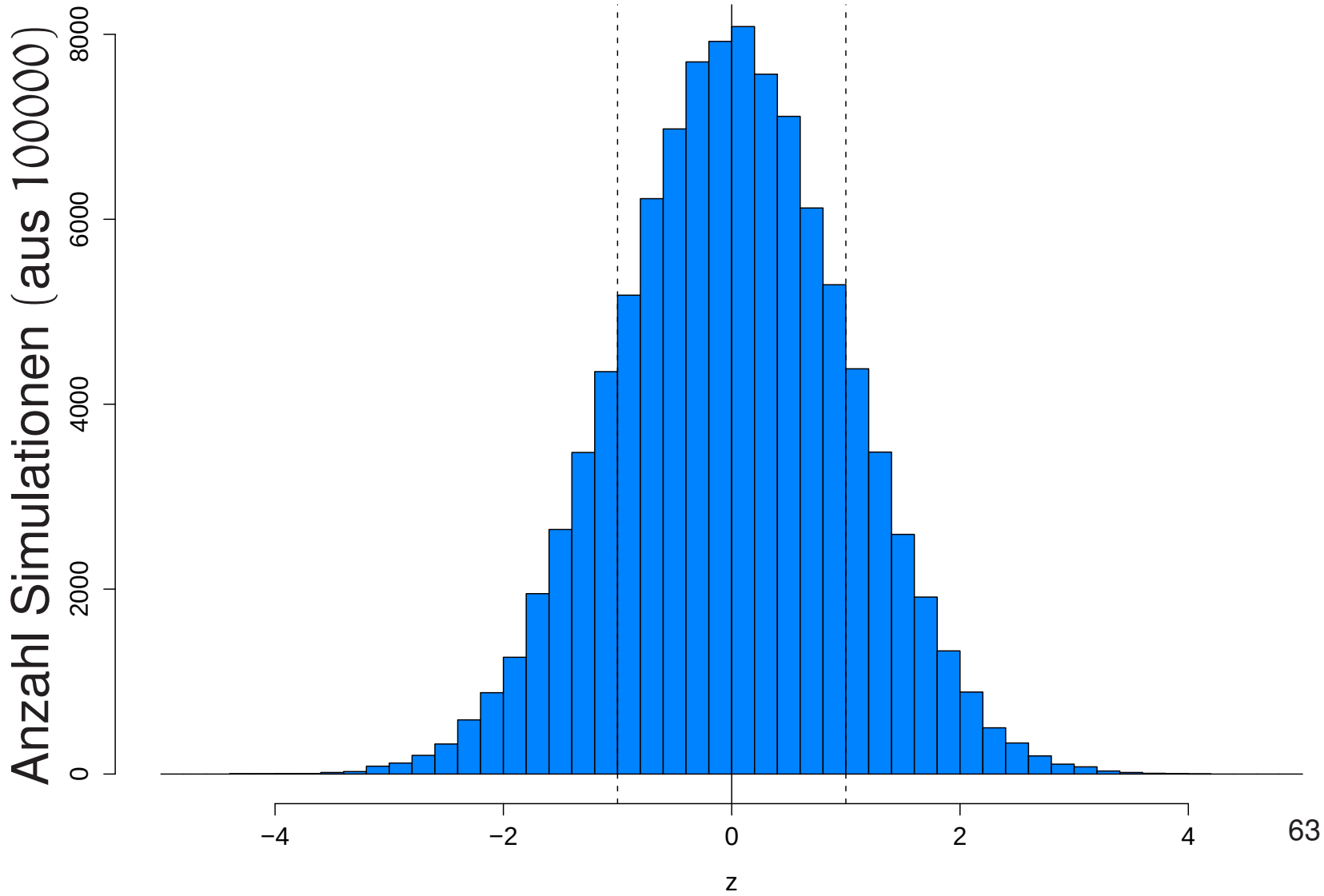
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 50)$



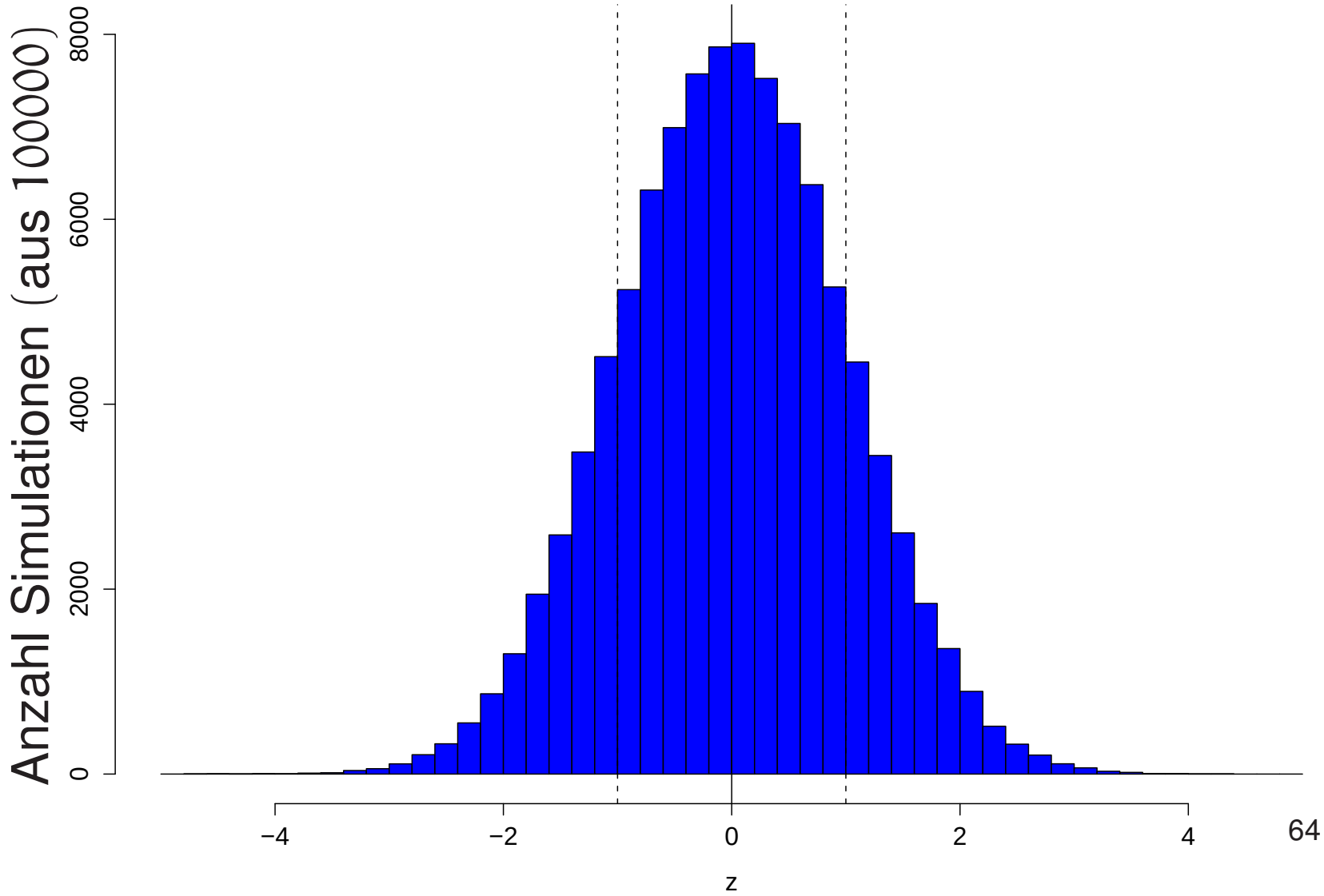
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 60)$



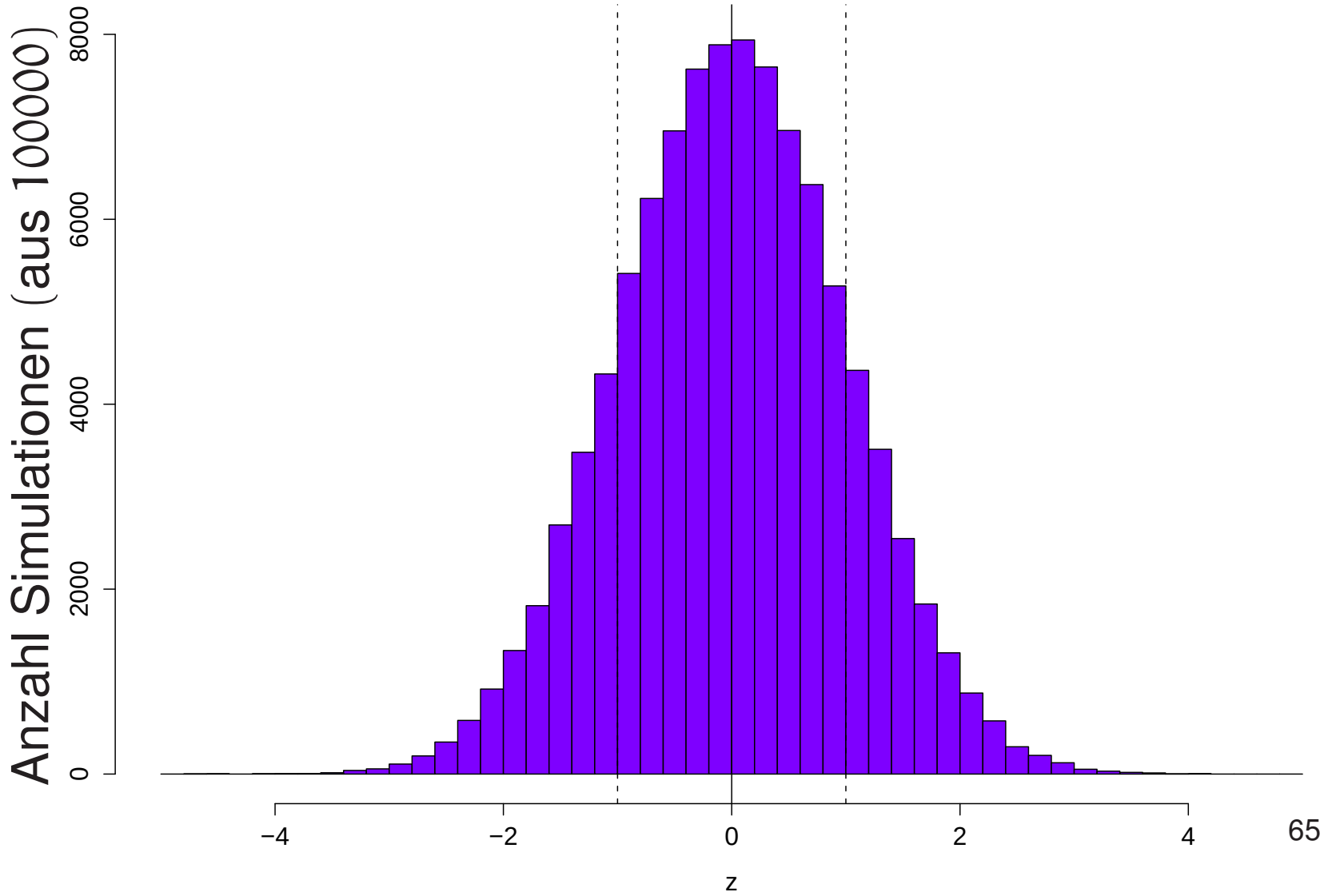
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 70)$



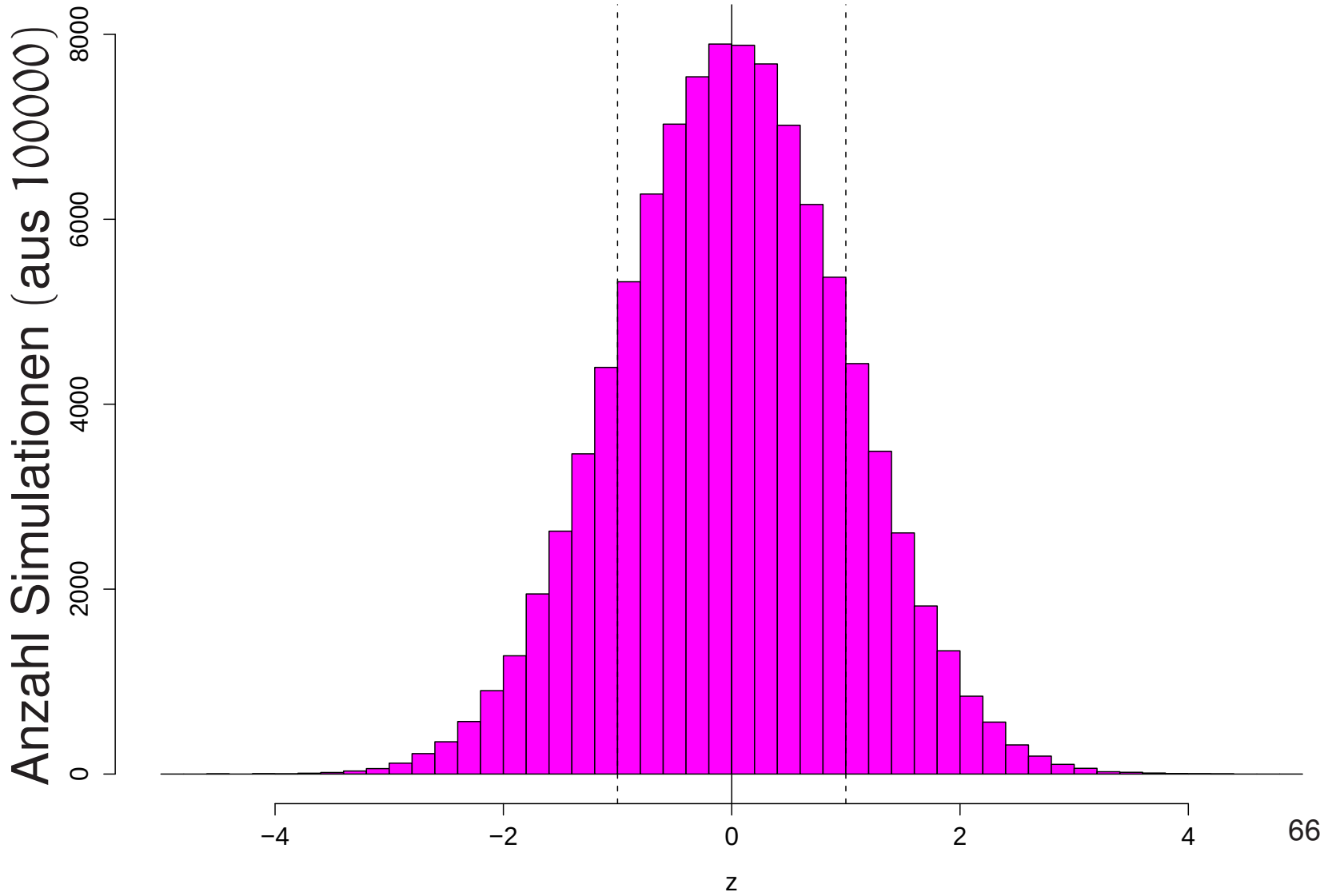
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 80)$



Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 90)$



Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 100)$



Die Verteilung von Z_n

scheint zu konvergieren.

Welche Form

hat die Grenzverteilung?

Die Verteilung von

Z_{100}

ist glockenförmig.

Um welche Glockenkurve handelt es sich genau?

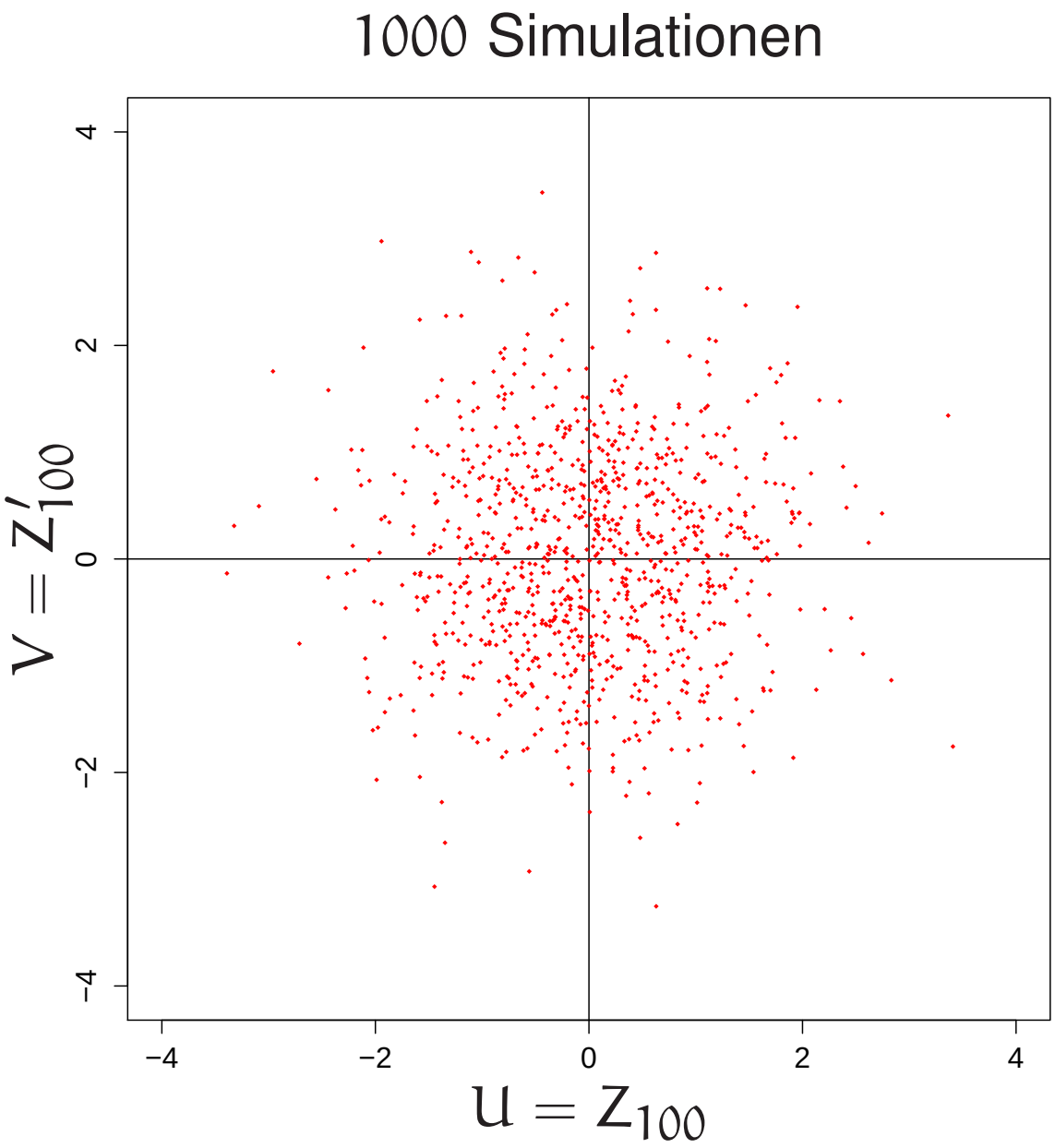
Glücklicher Einfall:

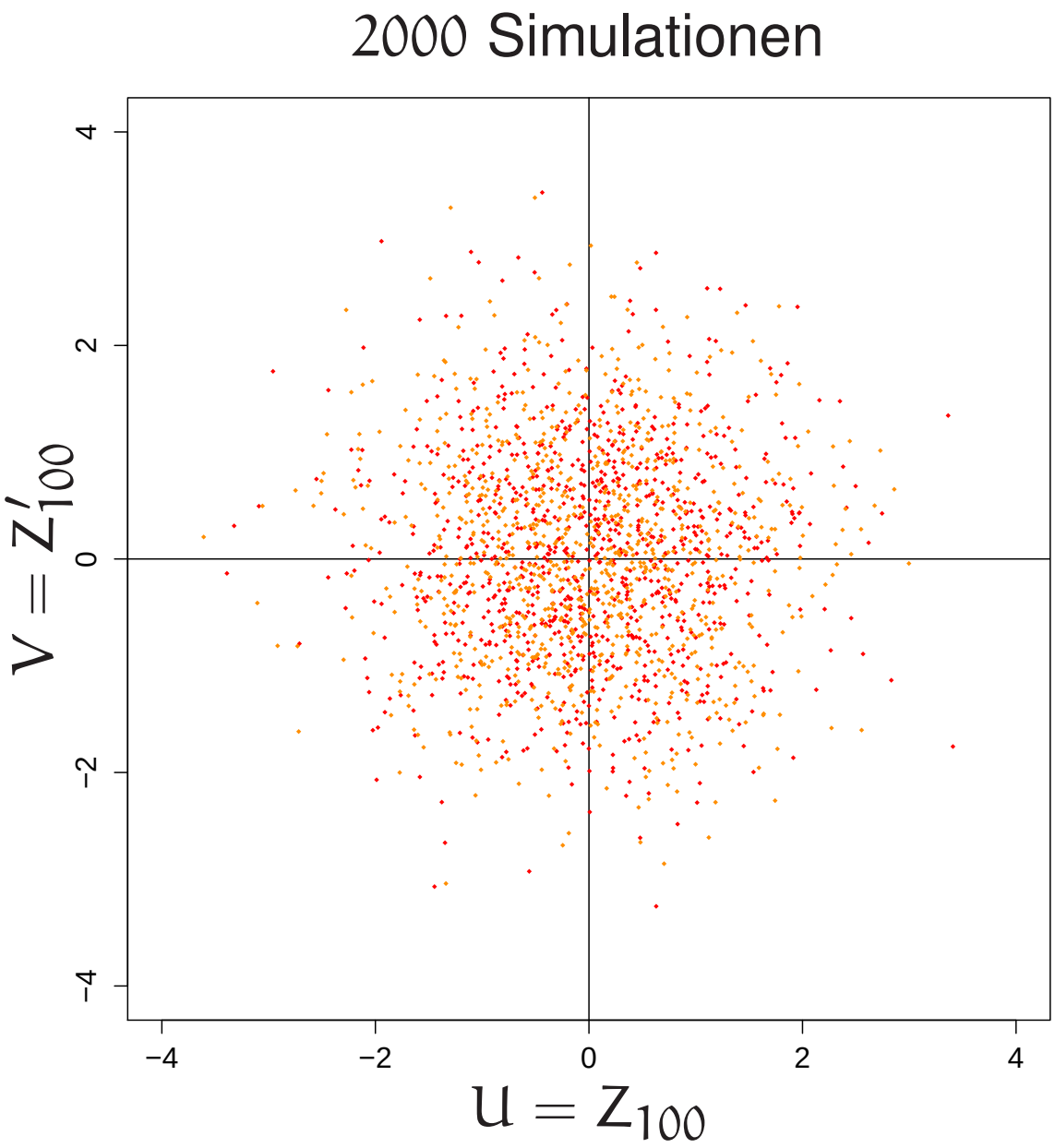
Nimm zwei unabhängige Kopien

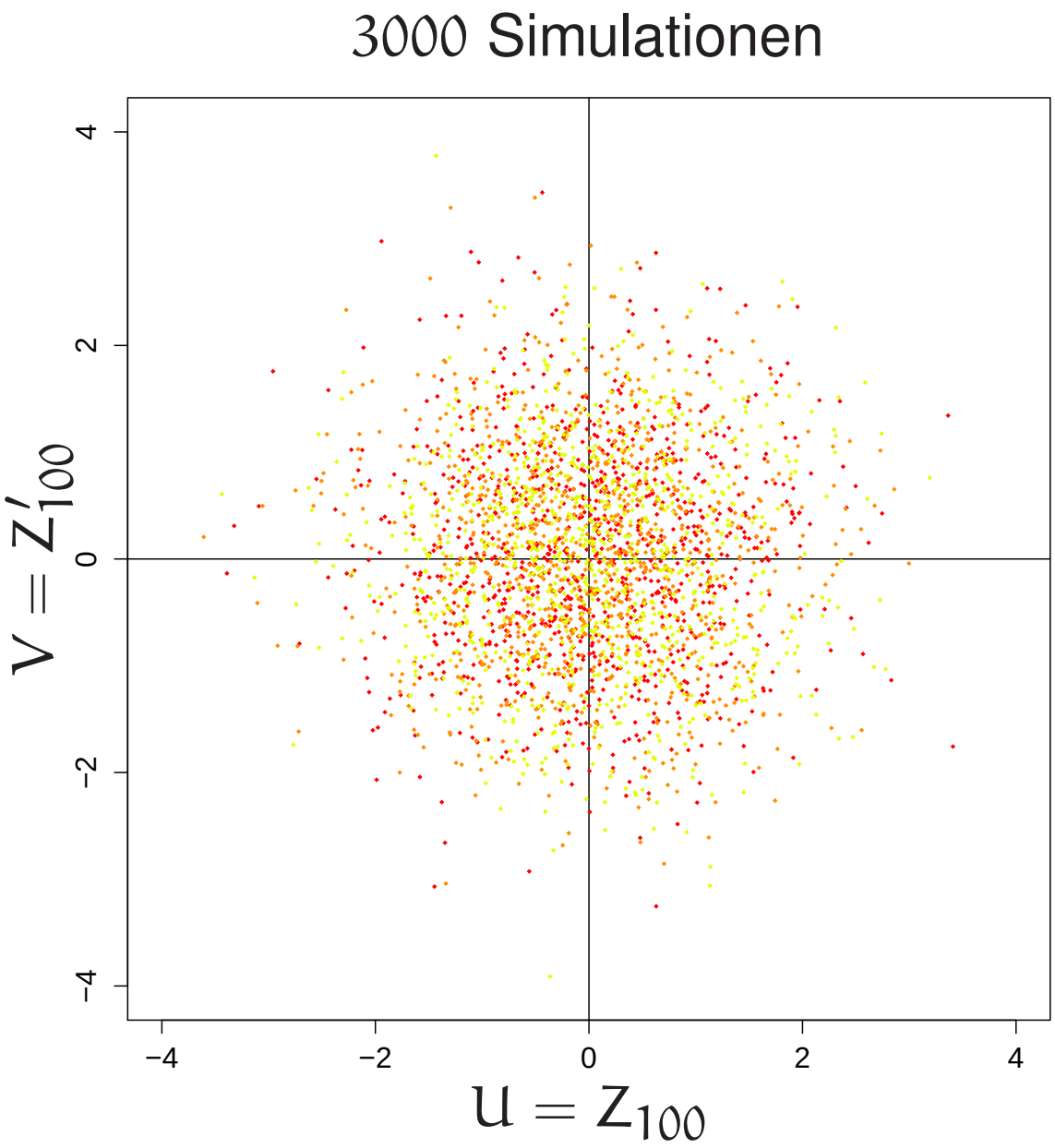
$$(U, V) := (Z_{100}, Z'_{100})$$

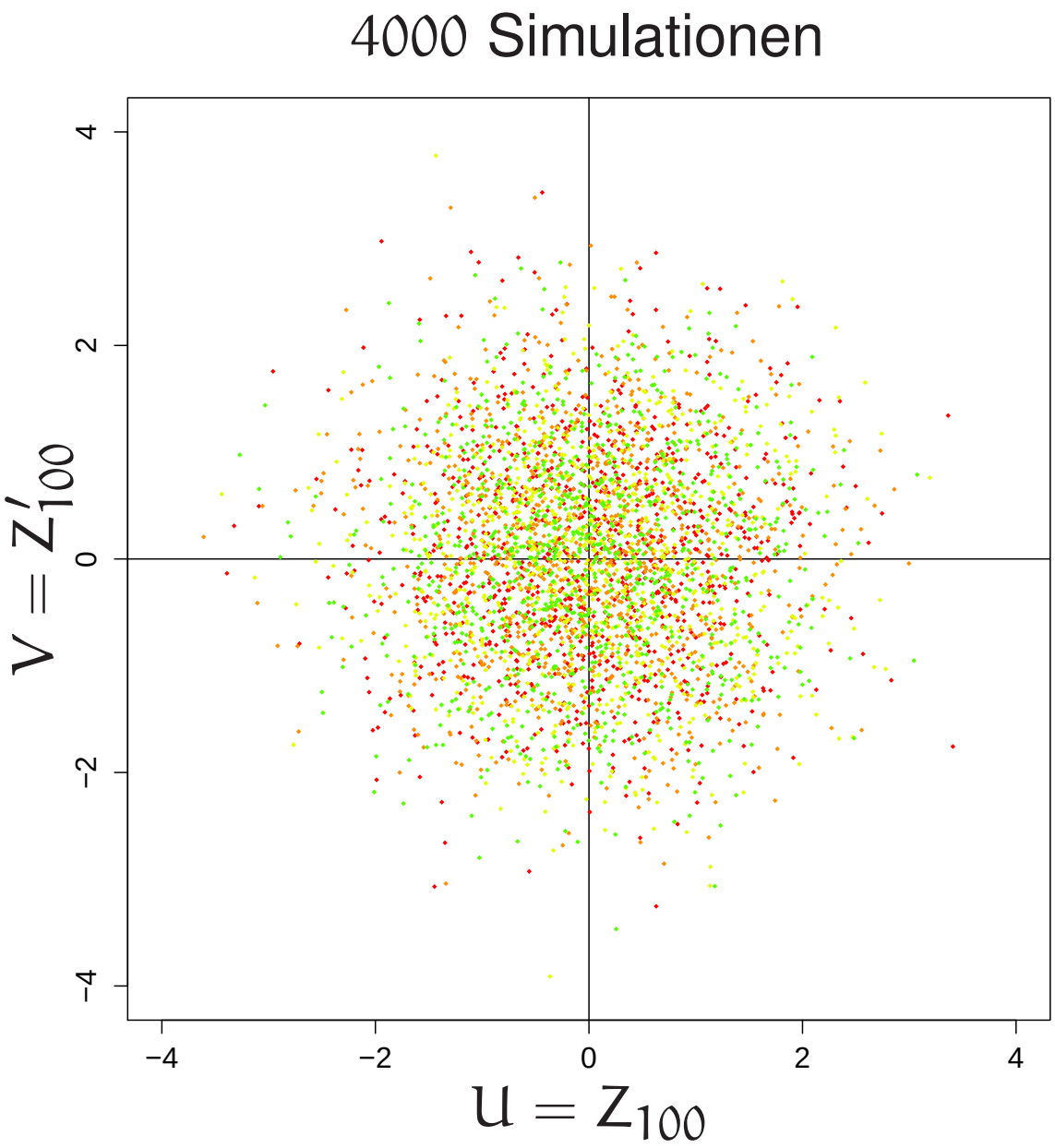
Wie sieht die gemeinsame Verteilung

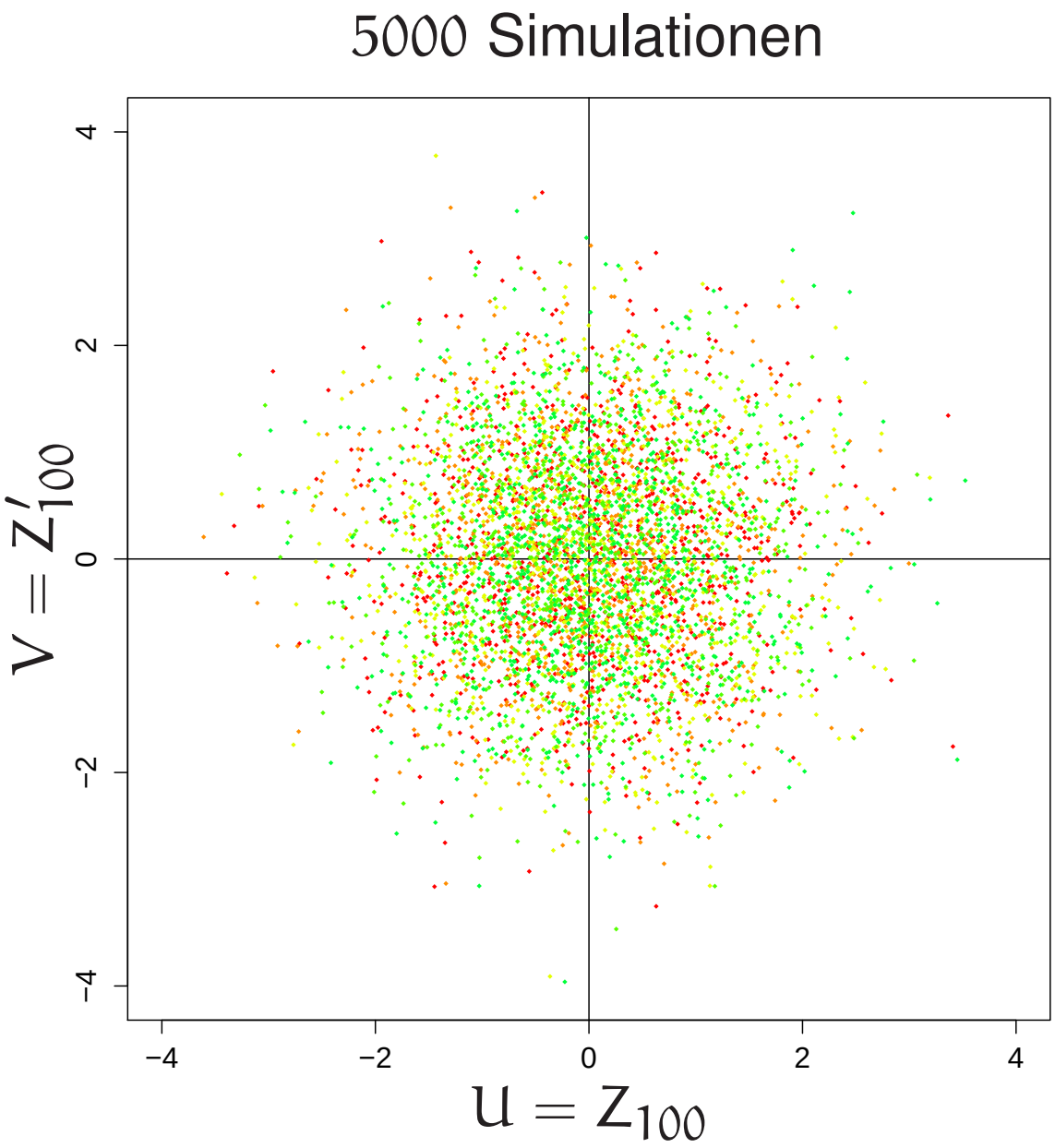
von U und V aus?

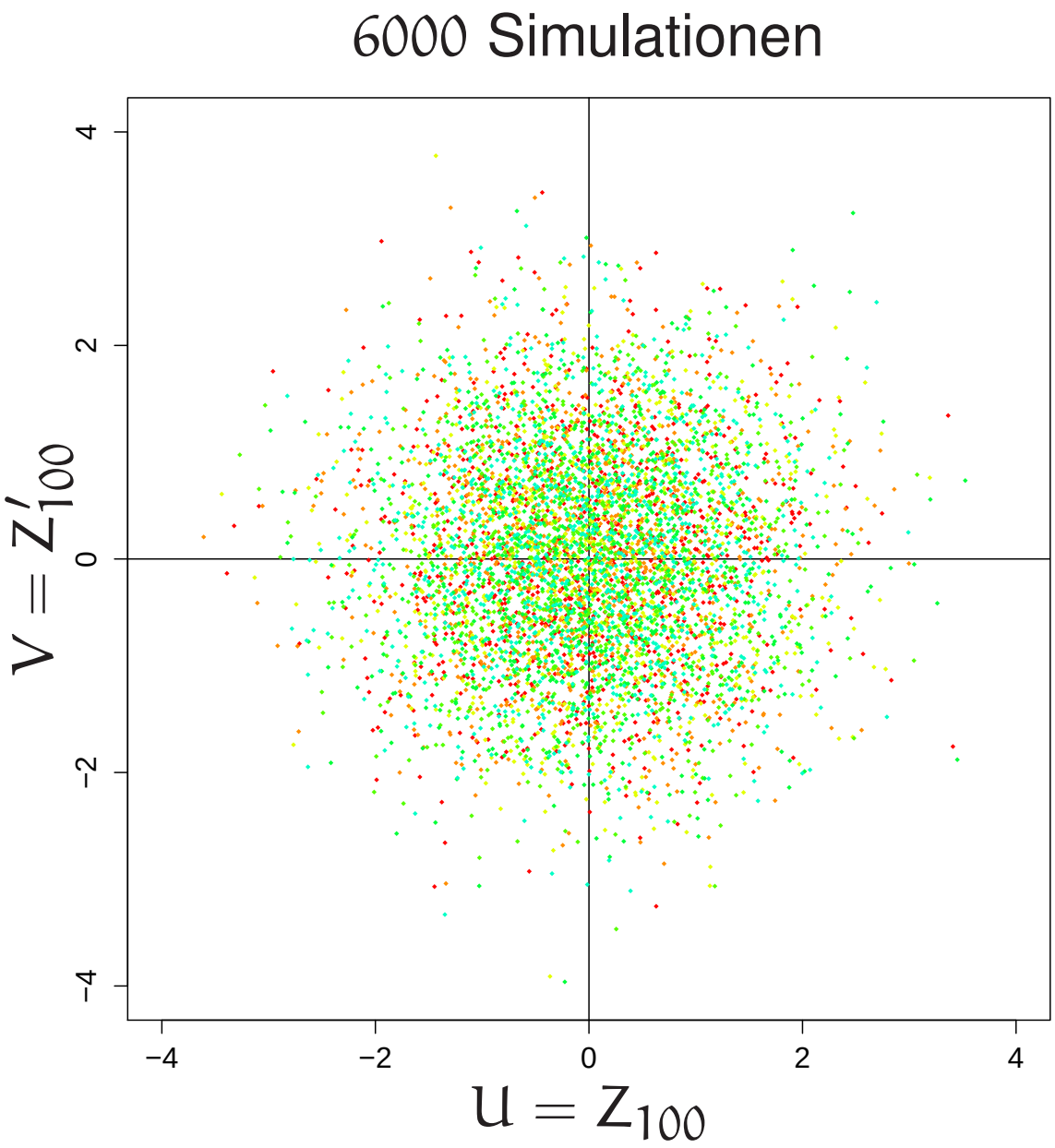

1000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

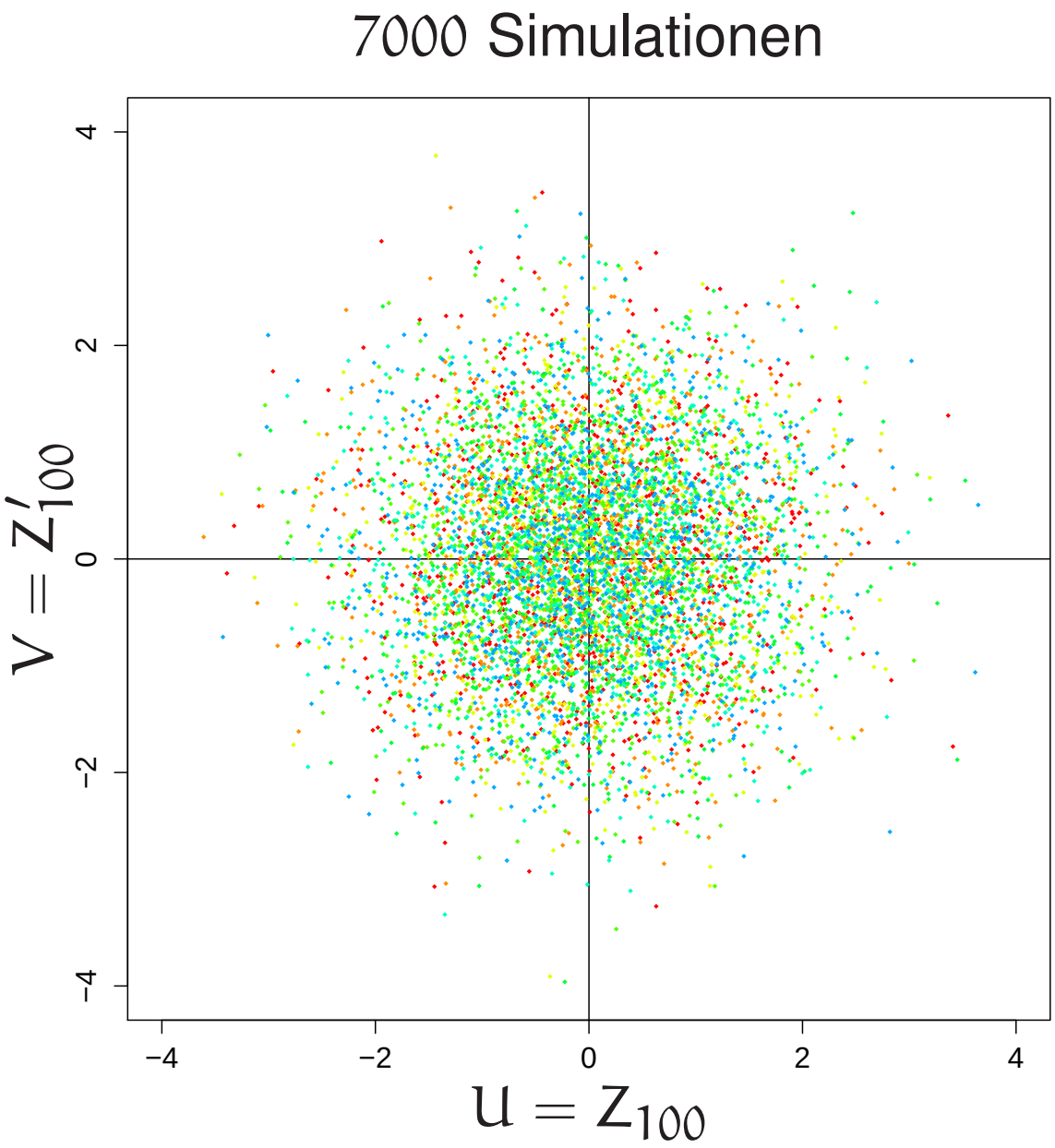

2000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

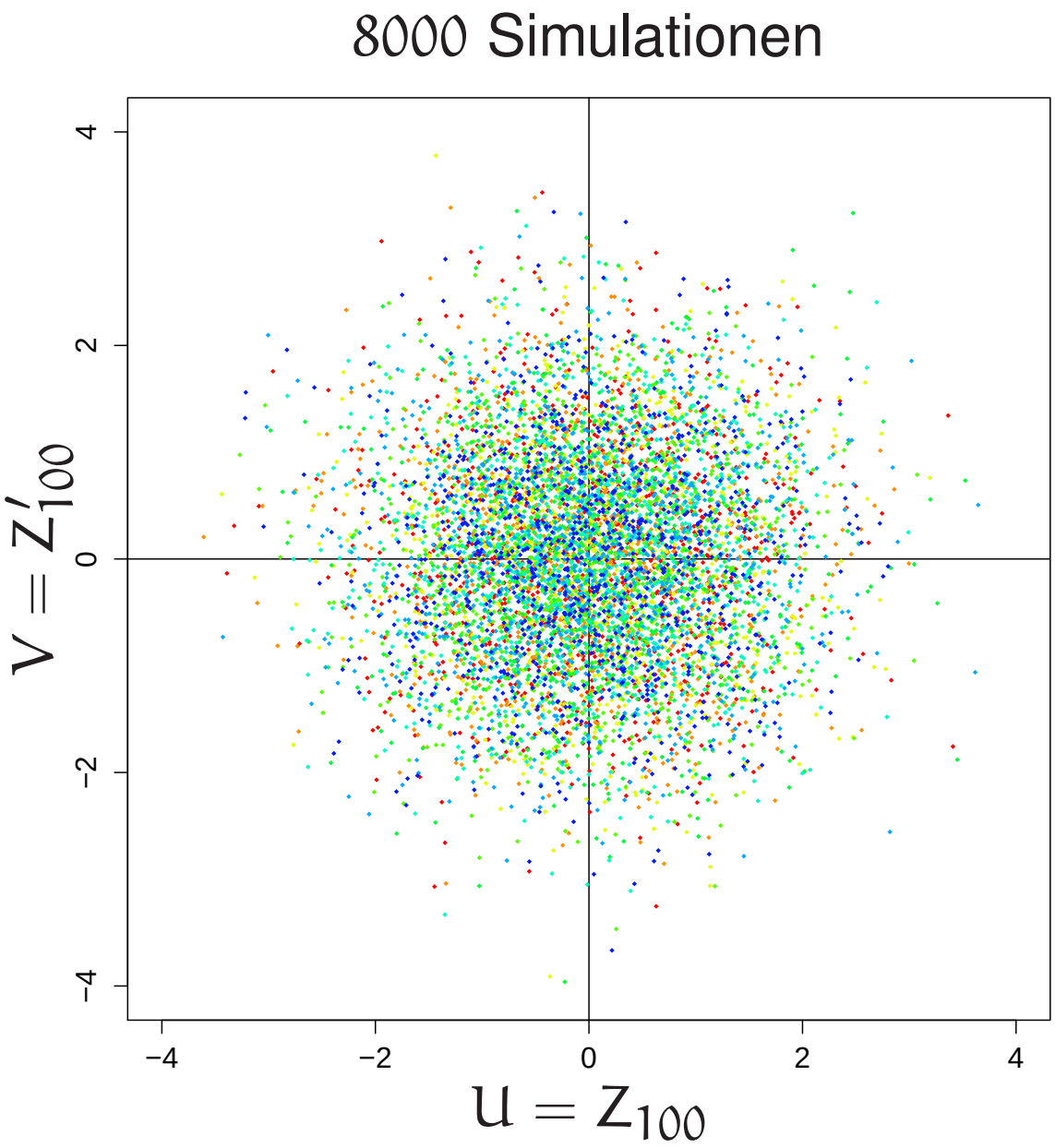

3000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

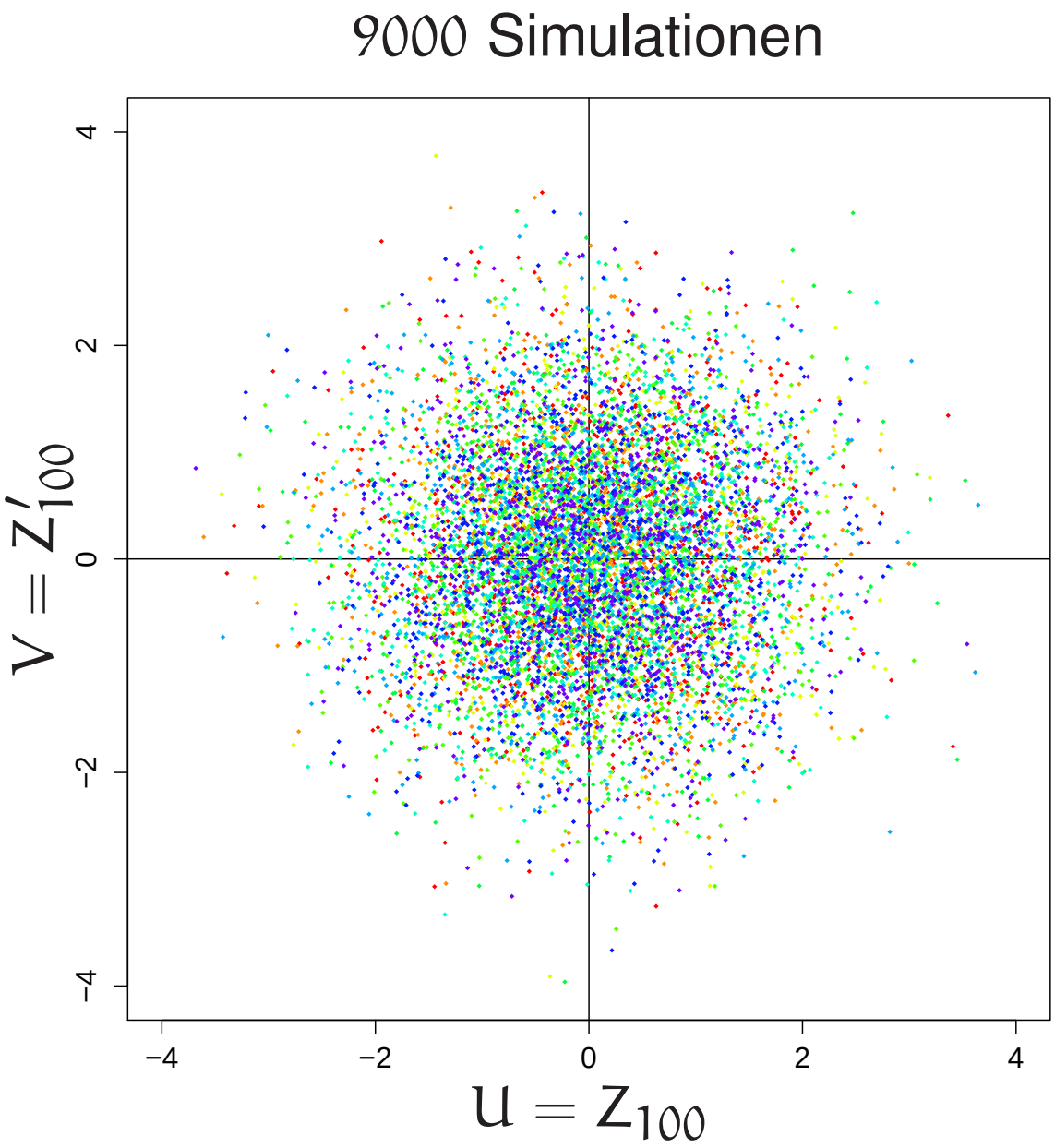

4000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

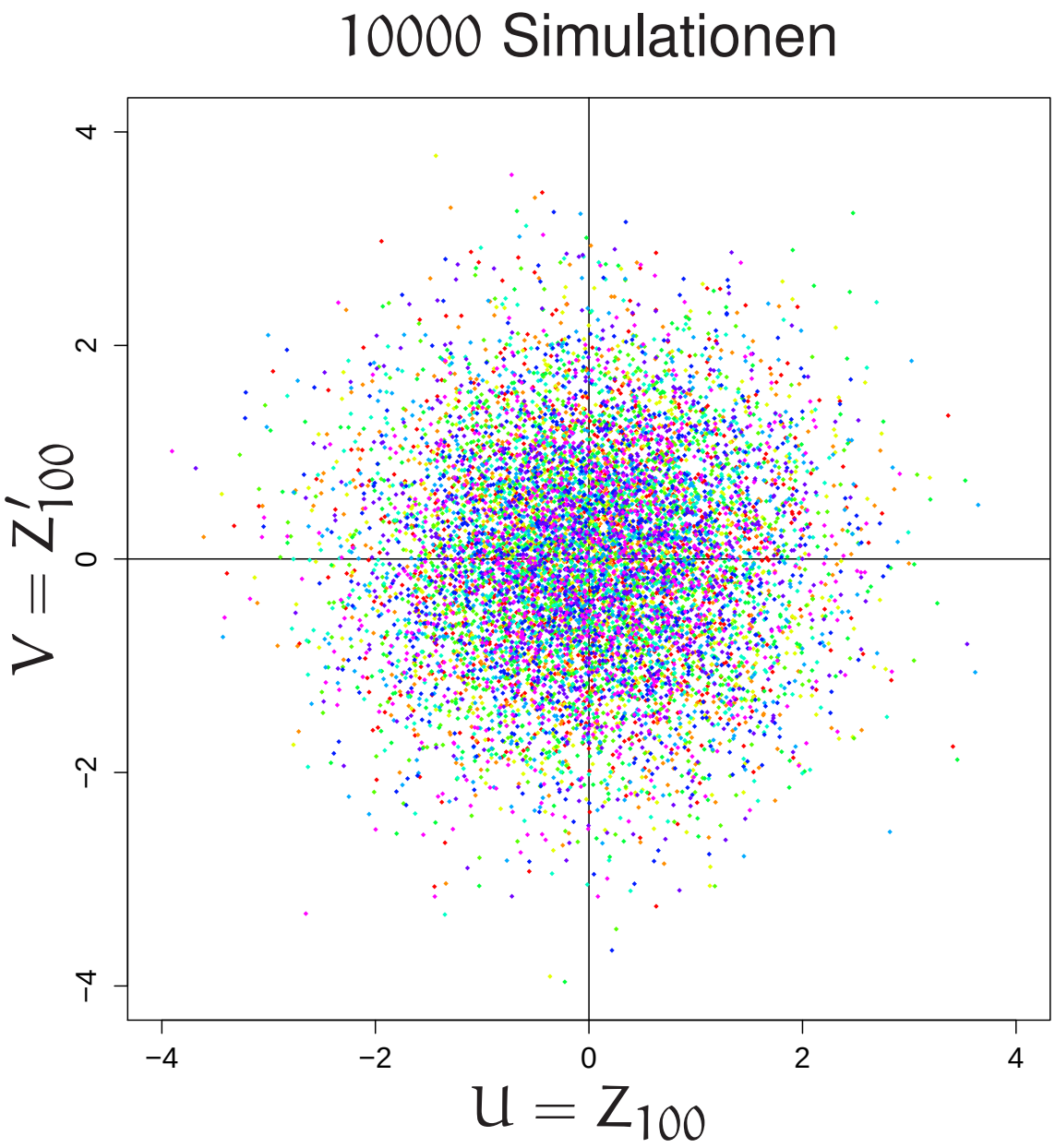

5000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

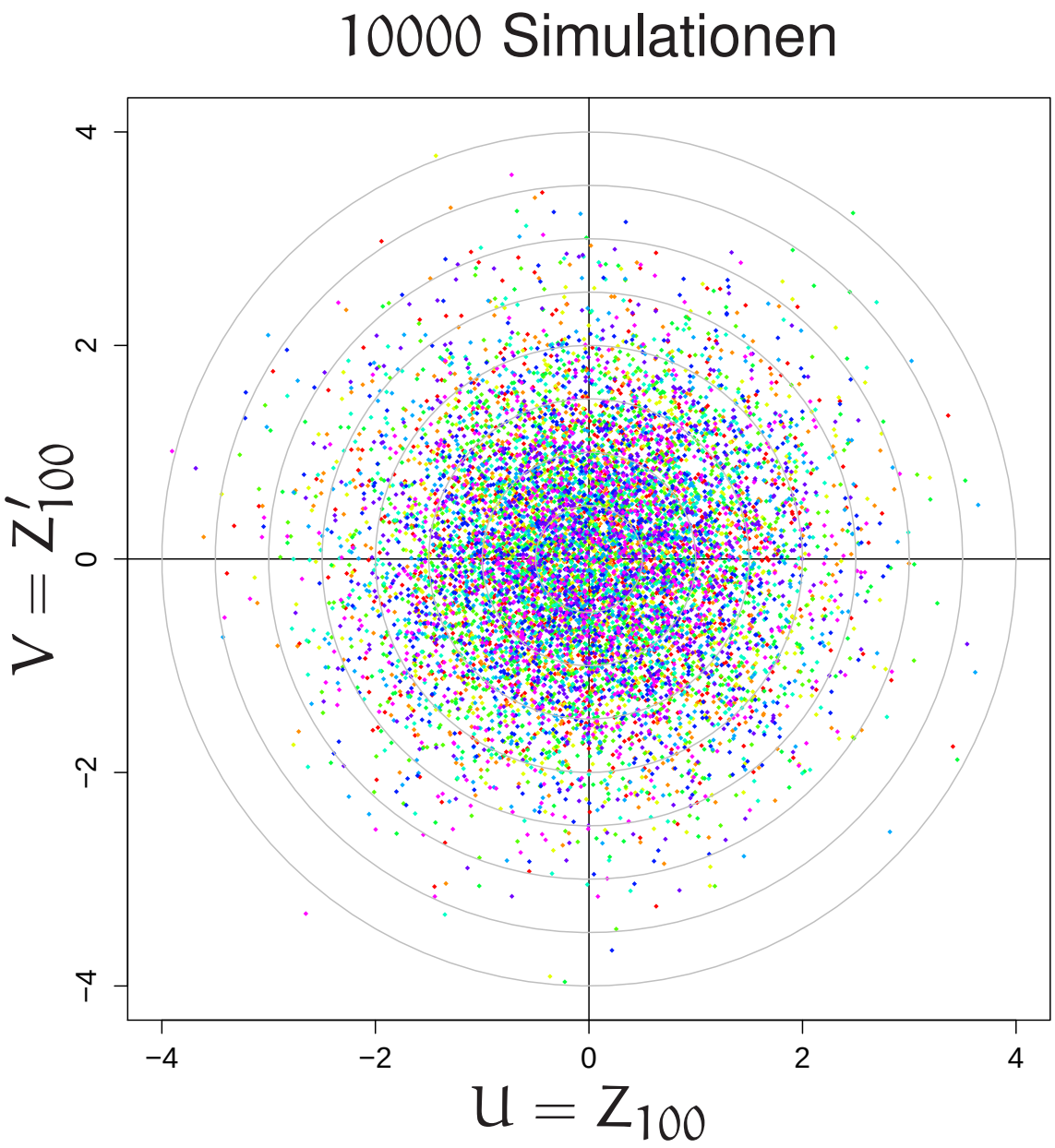

6000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$


7000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$v = z'_{100}$
$u = z_{100}$

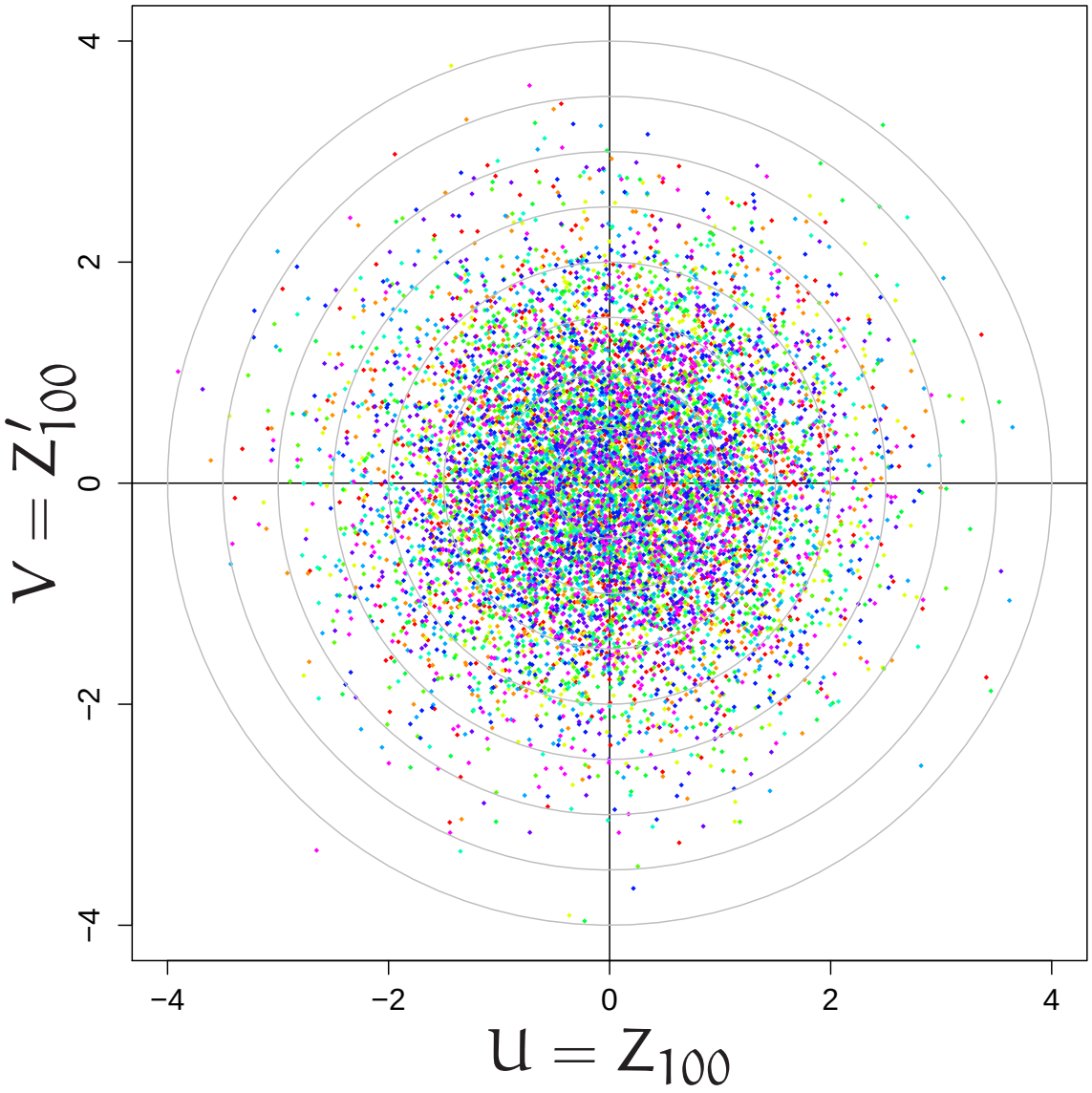

8000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$


9000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$


10000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$


10000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

Die Verteilung von (U, V) ist annähernd rotationssymmetrisch!



5. Eine Charakterisierieung der zweidimensionalen Standardnormalverteilung

Behauptung:

Aus “U und V unabhängig und identisch verteilt’

und

“Verteilung von (U, V) rotationssymmetrisch”

folgt,

dass U und V normalverteilt sind:

$$f_U(x) = f_V(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

Denn:

U, V *unabhängig* bedeutet:

$$(*) \quad f_{(U,V)}(a,b) = f_U(a) f_V(b)$$

$f_{(U,V)}$ *rotationssymmetrisch* heißt: es existiert ein g mit

$$(**) \quad f_{(U,V)}(a,b) = g(r), \qquad r := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Mit $f_U = f_V =: h$ folgt aus $(*)$ und $(**)$:

$$h(a)h(b) = g(r), \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$h(a)\,h(b) = g(r), \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Die zwei Paare (a, b) und $(0, \sqrt{a^2 + b^2})$ haben dasselbe r.

Also:

$$h(a)\,h(b) = h(0)\,h(\sqrt{a^2 + b^2})$$

Das ist eine Gleichung für h. Eine Lösung hiervon ist:

$$h(x) = e^{-x^2}$$

Denn

$$e^{-a^2} e^{-b^2} = 1 \cdot e^{-(a^2+b^2)}$$

$$h(a)\,h(b) = h(0)\,h(\sqrt{a^2+b^2})$$

Wie sieht die allgemeine Lösung aus?

$w(u) := h(\sqrt{u})$, $u \geq 0$, erfüllt

$$w(a^2)w(b^2) = w(0)w(a^2+b^2), \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

$$w(u)\,w(v) \;=\; k_0\,w(u+v), \qquad u,v \geq 0$$

hat als allgemeine Lösung

$$w(u) = k_0 e^{-k_1 u}, \quad k_1 \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt:

$$h(a) = w(a^2) = k_0\,e^{-k_1 a^2}.$$

FAZIT

Der Zentrale Grenzwertsatz

lässt sich erraten

(in konkreten Fällen,

mit etwas Glück).

Hier ist noch einmal die (im ZGS präzisierte) Botschaft der Stunde:

Summen (und Mittelwerte) von vielen unabhängigen,
identisch verteilten ZV mit endlicher Varianz
sind annähernd normalverteilt.

Diese Aussage bleibt übrigens auch
unter schwächeren Bedingungen bestehen,
sowohl was die Unabhängigkeit,
als auch was die identische Verteiltheit betrifft.

Eine Botschaft zum Mitnehmen ins Leben

(salopp formuliert):

“Die Summe von vielen

annähernd unabhängigen Zufallsvariablen,

die nicht notwendig identisch verteilt, aber

ungefähr von derselben Größenordnung sind,

ist annähernd normalverteilt.”

6. Münzwurf und Zentraler Grenzwertsatz

Der Münzwurf passt in den Rahmen des
Zentralen Grenzwertsatzes:
Sei $X_1, X_2, \ldots,$ ein fortgesetzer p-Münzwurf. Dann ergibt sich
aus dem Zentralen Grenzwertsatz der (alte)
Satz von de Moivre und Laplace:

Für Binomial-(n, p)-verteilte Zufallsvariable B_n (mit festem p)
gilt für alle $c < d \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{B_n - np}{\sqrt{npq}} \in [c, d]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{P}(Z \in [c, d]).$$

Dabei ist Z standard-normalverteilt.