Vorlesung 6a

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 2: Exponentialverteilung

0. Standard-exponentialverteilte Zufallsvariable

Wir erinnern an das letzte Beispiel aus Vorlesung 5b:

E. Sei U uniform verteilt auf $[0,1]$.

Gefragt ist nach der Verteilungsfunktion von $X := -\ln U$.

Für $b \geq 0$ ist

$$\mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(-\ln U \leq b) = \mathbf{P}(\ln U \geq -b)$$
$$= \mathbf{P}(U \geq e^{-b}) = 1 - e^{-b}.$$

Zufallsvariable X mit der Eigenschaft

$$\mathbf{P}(X > b) = e^{-b}, \;\; b \geq 0,$$

sind uns schon (indirekt) begegnet bei der

Approximation der Verteilung von pT;

dabei war T Geom(p)-verteilt mit kleinem p.

Wir sprachen damals von der

Exponentialapproximation der geometrischen Verteilung,

siehe VL 4a (und Abschnitt 3 der heutigen Vorlesung).

Definition: Die reellwertige Zufallsvariable X heißt

standard-exponentialverteilt, falls

$$\mathbf{P}(X > b) = e^{-b}, \;\; b \geq 0.$$

Äquivalent dazu ist:

X ist Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$b \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } b < 0 \\ 1 - e^{-b} & \text{für } b \geq 0. \end{cases}$$

Äquivalent dazu ist:

X ist Zufallsvariable mit Dichte $e^{-a}\,da, \quad a \geq 0.$

1. Erwartungswert und Varianz von Zufallsvariablen mit Dichten

Für diskrete reellwertige Zufallsvariable hatten wir

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a\, \rho(a)$$

Das hat sein Analogon im Fall reellwertiger ZV'er mit Dichten:

Den Verteilungsgewichten $\rho(a)$ entspricht die Dichte $f(a)\, da$.

Und aus der Summe wird ein Integral:

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \int_l^r a\, f(a)\, da$$

Im Diskreten hatten wir für $h : S \to \mathbb{R}$

die Transformationsformel

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a)\,\rho(a).$$

Analog gilt im Fall mit Dichten:

$$\mathbf{E}[h(X)] = \int_l^r h(a)\,f(a)\,da$$

Erwartungswert und Varianz

einer reellwertigen Zufallsvariable X mit Dichte $f(a)\,da$:

$$\mu = \mathbf{E}[X] := \int_l^r a\, f(a)\, da$$

(wobei wir wieder den Fall $\infty - \infty$ ausschließen)

und

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}[X] := \int_l^r (a - \mu)^2 f(a)\, da.$$

2. Exponentialverteilte Zufallvariable

Ist X standard-exponentialverteilt und $\lambda > 0$,

dann gilt für $Y := \frac{X}{\lambda}$

$$\mathbf{P}(Y > b) = \mathbf{P}(\tfrac{X}{\lambda} > b) = \mathbf{P}(X > \lambda b) = e^{-\lambda b}, \quad b \geq 0.$$

Definition:

Y heißt exponentialverteilt mit Parameter λ,

kurz Exp(λ)-verteilt, falls

$$\mathbf{P}(Y > b) = e^{-\lambda b}, \quad b \geq 0.$$

Für $\lambda = 1$: Standard-Exponentialverteilung.

Es ergibt sich sofort:

Ist Y Exp(λ)-verteilt, dann ist λY Exp(1)-verteilt.

Denn:

$$\mathbf{P}(\lambda Y > b) = \mathbf{P}(Y > \tfrac{b}{\lambda}) = e^{-\lambda \frac{b}{\lambda}} = e^{-b}, \quad b \geq 0.$$

Die Verteilungsfunktion einer Exp(λ)-verteilten ZV'en Y ist

$$F(b) = 1 - \mathbf{P}(Y > b) = 1 - e^{-\lambda b}, \quad b \geq 0.$$

Die Dichte einer Exp(λ)-verteilten ZV'en Y ist

$$f(b)\,db = \lambda e^{-\lambda b}\,db\,, \quad b \geq 0.$$

Erwartungswert und Varianz einer standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X:

Mit partieller Integration

$$\int u\, v' = uv - \int u' v$$

ergibt sich

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty a\, e^{-a}\, da = -ae^{-a}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 1 \cdot e^{-a} da = 1$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_0^\infty a^2\, e^{-a}\, da = -a^2 e^{-a}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2a \cdot e^{-a} da = 2$$

Also: $\boxed{\mathbf{E}[X] = 1,\ \mathbf{Var}[X] = 1.}$

Erwartungswert und Varianz einer Exp(λ)-verteilten Zufallsvariablen Y:

Ist Y Exp(λ)-verteilt, dann ist λY Exp(1)-verteilt.

Also ist

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{\lambda}\lambda Y\right] = \frac{1}{\lambda},$$

$$\mathbf{Var}[Y] = \mathbf{Var}\left[\frac{1}{\lambda}\lambda Y\right] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Erwartungswert und Varianz einer Exp(λ)-verteilten Zufallsvariablen Y:

Ist Y Exp(λ)-verteilt, dann ist λY Exp(1)-verteilt.

Also ist

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{\lambda}\lambda Y\right] = \frac{1}{\lambda},$$

$$\mathbf{Var}[Y] = \mathbf{Var}\left[\frac{1}{\lambda}\lambda Y\right] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3. Die Exponentialapproximation der geometrischen Verteilung

Betrachten wir eine Geom(p)-verteilte Zufallsvariable Y mit

$$p = \frac{1}{100}.$$

Es gilt: $\mathbf{E}[Y] = 100$, also hat $\frac{Y}{100}$ Erwartungswert 1.

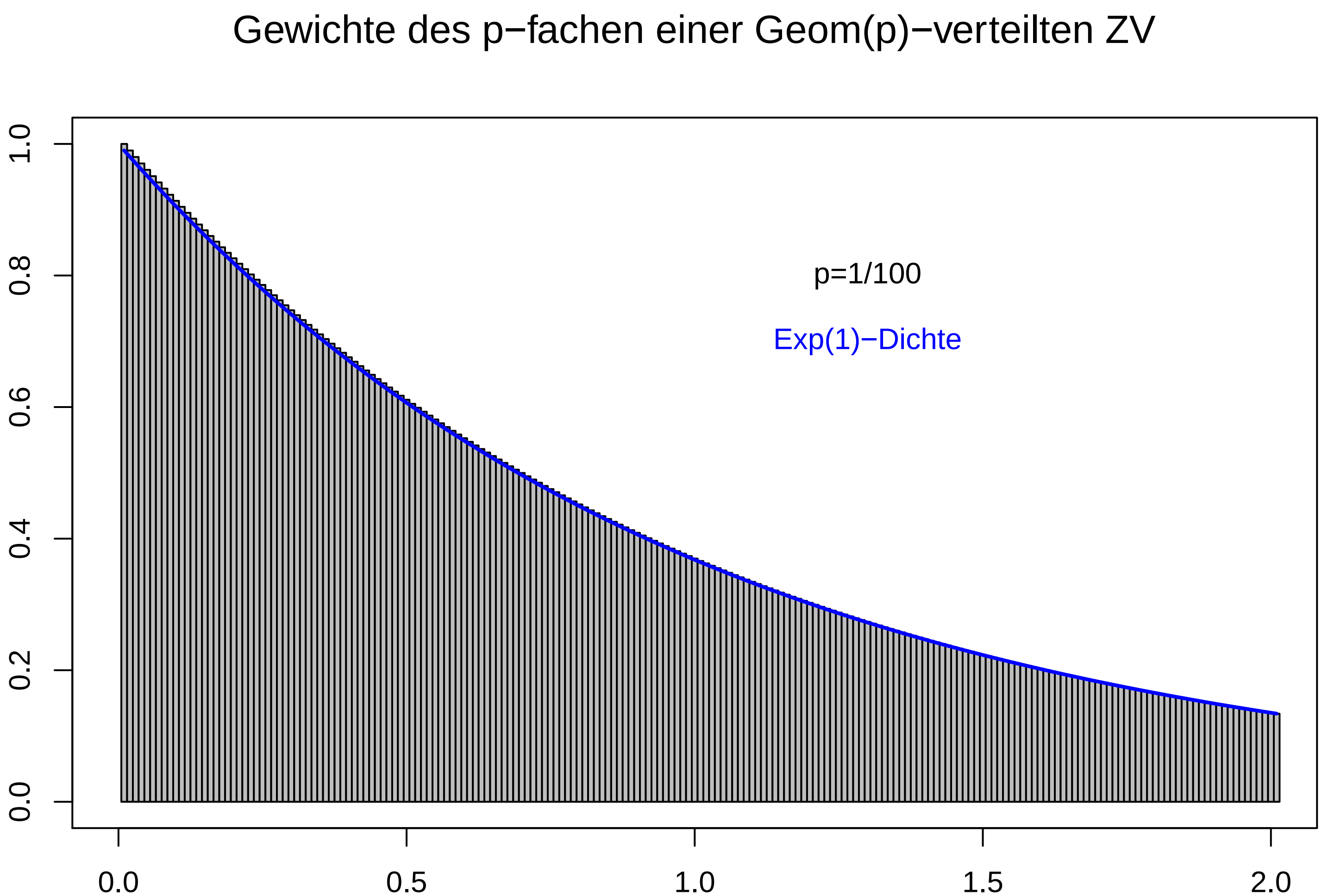
$$\mathbf{P}\left(\frac{Y}{100} = \frac{k}{100}\right) = \mathbf{P}(Y = k)$$

$$= \frac{1}{100}\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{k-1} = \frac{1}{100}\left(\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100}\right)^{(k-1)/100}$$

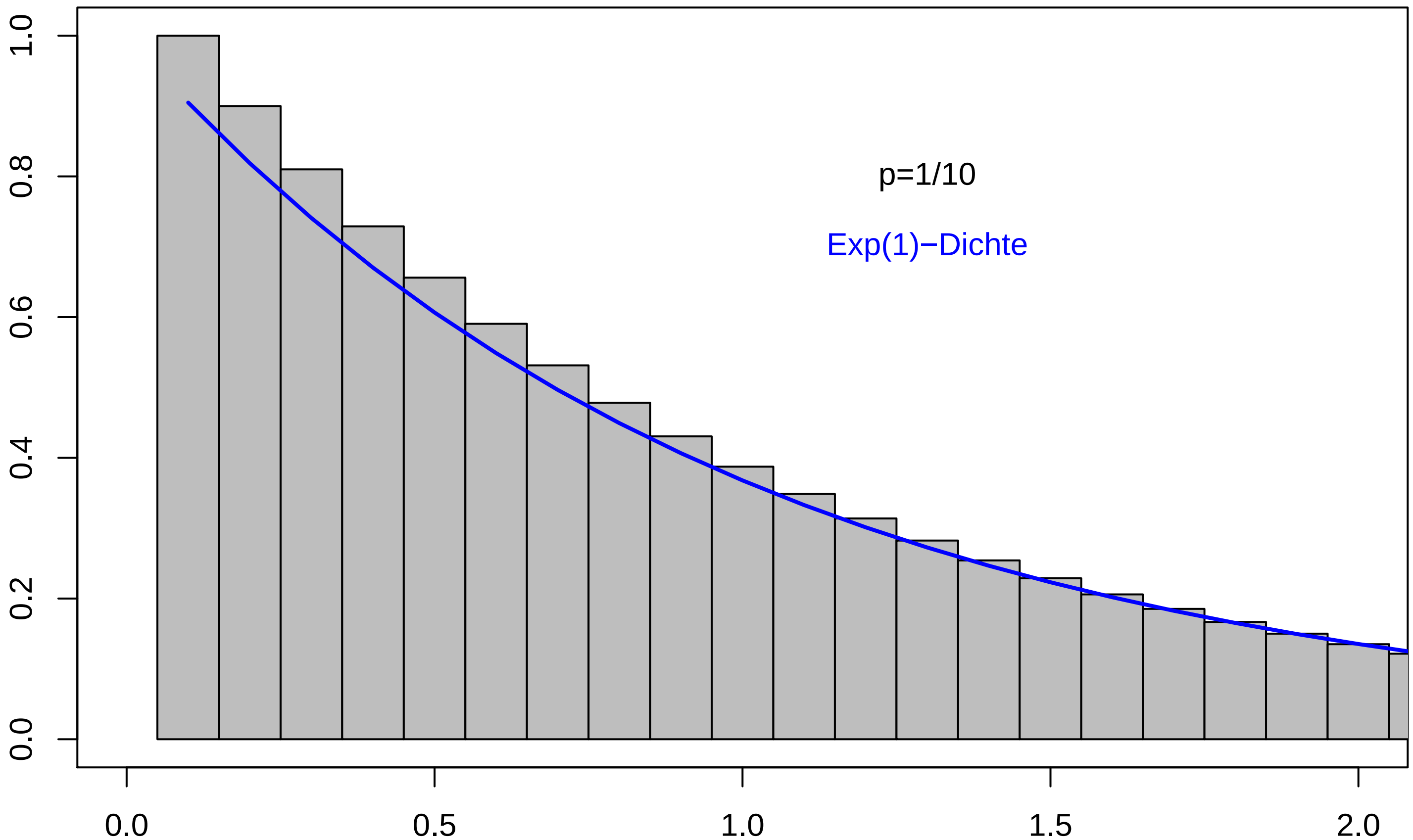
$$\approx \frac{1}{100}\, e^{-(k-1)/100} \approx \mathbf{P}\left(X \in \left[\frac{k-1}{100}, \frac{k}{100}\right]\right)$$

für ein standard-exponentialverteiltes X.

Das wird durch das folgende Bild veranschaulicht:


Gewichte des p−fachen einer Geom(p)−verteilten ZV
p=1/100
Exp(1)−Dichte
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

Gewichte des p−fachen einer Geom(p)−verteilten ZV



Salopp gesprochen:

Für kleines p hat eine Geom(p)-verteilte Zufallsvariable Y einen großen Erwartungswert, nämlich $\frac{1}{p}$.
Man holt die Verteilung von Y zurück ins Schaubild, indem man pY betrachtet.

Wir erinnern an die “Exponentialapproximation”:

(Vorlesung 4a und Buch Seite 42):

Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_n geometrisch verteilt mit $\mathbf{E}[X_n] \to \infty$ für $n \to \infty$, dann gilt:

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} > t\Big) \to e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} > t\Big) \to e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist X eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable,

dann kann man dies schreiben als

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} > t\Big) \to \mathbf{P}(X > t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Man sagt dafür auch:

Die Folge der Zufallsvariablen $X_n/\mathbf{E}[X_n]$

konvergiert in Verteilung

gegen die Zufallsvariable X.

4. Dichten von $X + d$ und von cX

Lemma (Dichte von $X + d$):

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f_X(a)\, da$.

Für $d \in \mathbb{R}$ hat dann $Y := X + d$ die Dichte

$$f_Y(b)\, db = f_X(b - d)\, db.$$

Beweis:

$$F_Y(b) = \mathbf{P}(Y \le b) = \mathbf{P}(X \le b - d) = F_X(b - d),$$

also

$$F_Y'(b) = F_X'(b - d)\,. \quad \square$$

Lemma (Dichte von cX):

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f_X(a)\,da$.

Für $c > 0$ hat dann $Y := cX$ die Dichte

$$f_Y(b) := f_X\left(\frac{b}{c}\right)\frac{1}{c}\,db.$$

Beweis:

$$F_Y(b) = \mathbf{P}(Y \le b) = \mathbf{P}(X \le \tfrac{b}{c}) = F_X(\tfrac{b}{c}),$$

also

$$F'_Y(b) = \tfrac{1}{c}F'_X(\tfrac{b}{c}). \quad \square$$

Lemma (Dichte von cX):

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f_X(a)\,da$.

Für $c > 0$ hat dann $Y := cX$ die Dichte

$$f_Y(b) = f_X(\tfrac{b}{c})\,\tfrac{1}{c}\,db.$$

Zum Merken:

Die Dichte von cX bei b

ist die Dichte von X im Urbild b/c,

geteilt durch den Streckungsfaktor c

Beispiel:

Ist X standard-exponentialverteilt,

dann hat $\frac{X}{\lambda}$ die Dichte

$$\lambda e^{-\lambda b} db, \quad b \geq 0.$$