

Vorlesung 4b

Unabhängigkeit

(Buch S. 61, S. 64-69)

0. Zwei binäre Zufallsvariable

Der Wertebereich von $X = (X_1, X_2)$ sei $\{o, u\} \times \{\ell, r\}$

	ℓ	r
o		
u		

Wie sollten die Verteilungsgewichte der 4 Ausgänge

$\{(o, \ell), (o, r), (u, \ell), (u, r)\}$ aussehen,

damit es gerechtfertigt ist zu sagen:

X_1 und X_2 sind unabhängig?

Beispiel:

Der Wertebereich von $X = (X_1, X_2)$ sei $\{o, u\} \times \{\ell, r\}$

	ℓ	r
o	$2/6$	$1/6$
u	$1/6$	$2/6$

Das Chancenverhältnis von ℓ zu r ,

d.h. das Verhältnis $\mathbf{P}(X_2 = \ell) : \mathbf{P}(X_2 = r)$,

$$\text{ist } \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = 1 : 1.$$

Beispiel:

Der Wertebereich von $X = (X_1, X_2)$ sei $\{o, u\} \times \{\ell, r\}$

	ℓ	r
o	$2/6$	$1/6$
u	$1/6$	$2/6$

Wenn man aber weiß, dass das Ereignis $\{X_1 = o\}$ eintritt,
wird man anders wetten.

Das Chancenverhältnis von ℓ zu r ist dann $2 : 1$.

Beispiel: Unausgeglichene Verhältnisse

Der Wertebereich von $X = (X_1, X_2)$ sei $\{o, u\} \times \{\ell, r\}$

	ℓ	r
o	$2/6$	$1/6$
u	$1/6$	$2/6$

Wenn man aber weiß, dass das Ereignis $\{X_1 = o\}$ eintritt,
wird man anders wetten.

Das Chancenverhältnis von ℓ zu r ist dann $2 : 1$.

Die Verhältnisse in den Zeilen sind nicht ausgeglichen!

Beispiel: Ausgeglicheene Verhältnisse

Der Wertebereich von $X = (X_1, X_2)$ sei $\{o, u\} \times \{\ell, r\}$

	ℓ	r
o	$2/9$	$4/9$
u	$1/9$	$2/9$

Hier sind die Chancenverhältnisse von ℓ zu r
in allen Zeilen gleich -
unabhängig vom Ausgang von X_1 .

1. Unabhängigkeit von zwei Zufallsvariablen

(Buch S. 61)

Definition

Zufallsvariable X_1, X_2 heißen (stochastisch) *unabhängig*,
wenn für alle Ereignisse $\{X_1 \in A_1\}, \{X_2 \in A_2\}$ gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

(“Produktformel für Wahrscheinlichkeiten”)

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

Zum Merken :

Für jedes Paar von Teilmengen $A_2, A'_2 \subset S_2$ gilt:

Die Verhältnisse

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) : \mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A'_2)$$

hängen nicht ab von A_1

(und sind in diesem Sinn “ausgeglichen”).

Beispiel: Zweimaliges (gewöhnliches) Würfeln (X_1, X_2) :

X_1 und X_2 sind unabhängig. In der Tat:

Seien $A_1, A_2 \subset \{1, \dots, 6\}$ mit $\#A_1 =: m_1$, $\#A_2 =: m_2$.

Dann ist $\#A_1 \times A_2 = m_1 \cdot m_2$,

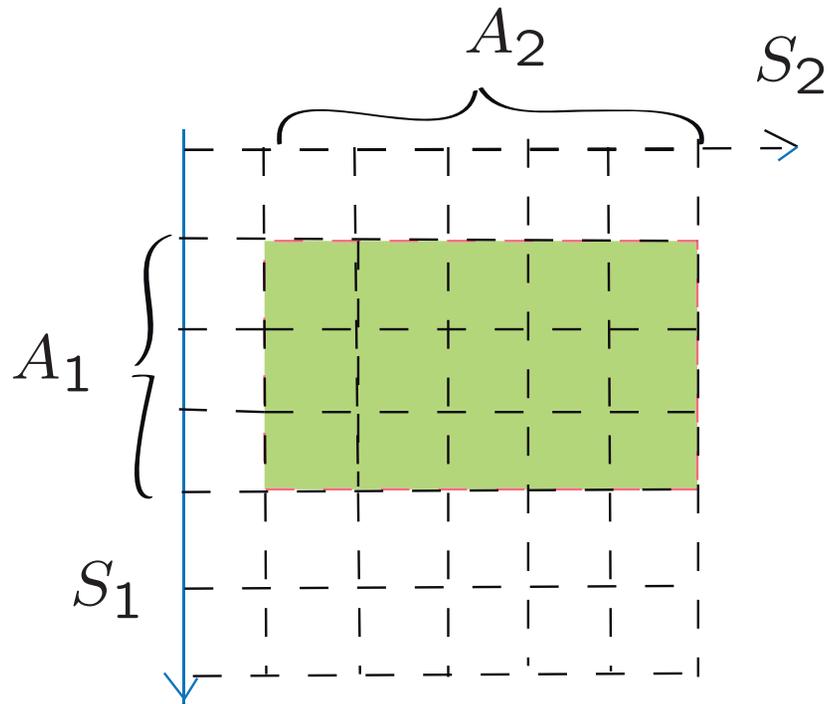
also

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2)$$

$$= \mathbf{P}((X_1, X_2) \in A_1 \times A_2)$$

$$= \frac{m_1 m_2}{36} = \frac{m_1}{6} \cdot \frac{m_2}{6}$$

$$= \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \mathbf{P}(X_2 \in A_2).$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) \\
 = \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\mathbf{P}(X_2 \in A_2).
 \end{aligned}$$

Für die Prüfung der Unangängigkeit *diskreter* Zufallsvariabler
reicht es, statt *Teilmengen* $A_1 \subset S_1$, $A_2 \subset S_2$
die einzelnen *Ausgänge* $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$ zu betrachten:

Für diskrete Zufallsvariable gilt: X_1, X_2 sind unabhängig genau dann,

wenn für alle $a_1 \in S_1$ und $a_2 \in S_2$ gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

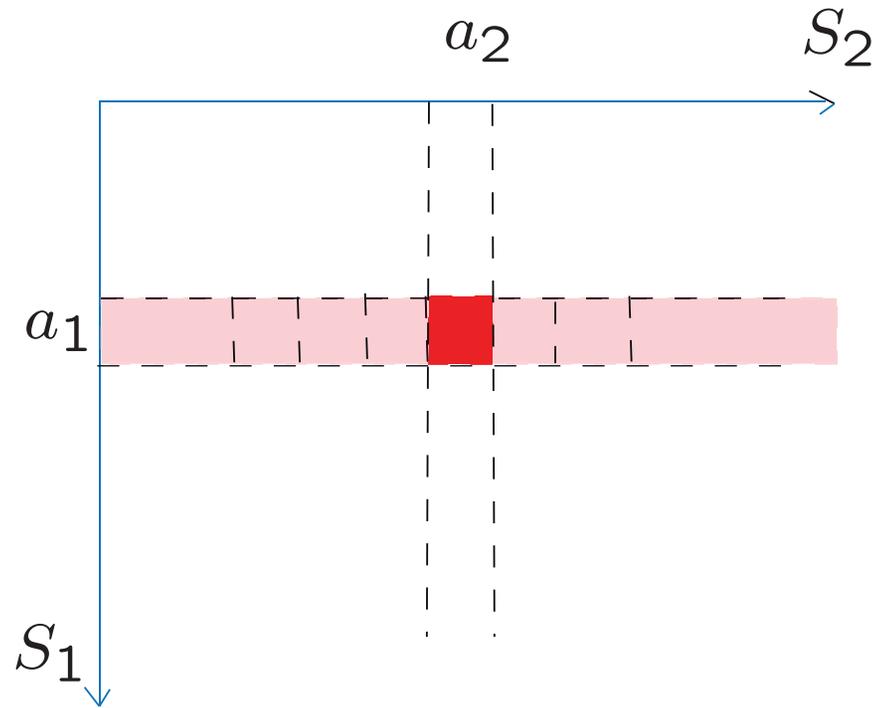
Denn:

“ \implies ” ist klar (wähle $A_1 := \{a_1\}$, $A_2 := \{a_2\}$).

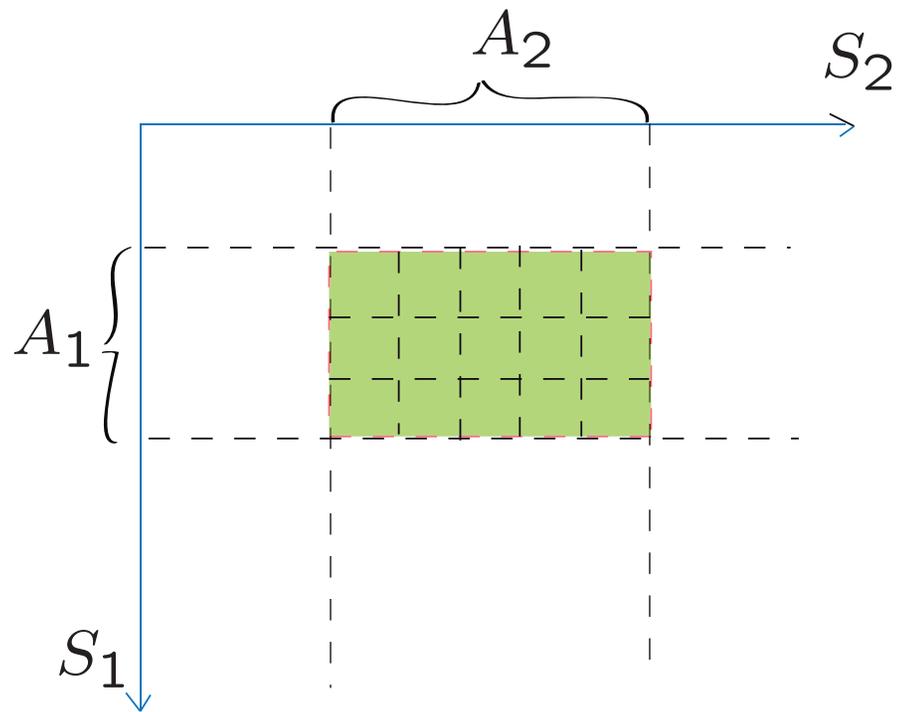
$$\text{“}\longleftarrow\text{”}: \mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \sum_{a_1 \in A_1, a_2 \in A_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in A_1, a_2 \in A_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in A_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \sum_{a_2 \in A_2} \mathbf{P}(X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \mathbf{P}(X_2 \in A_2).$$



$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}(X_2 = a_2)$$



$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) \\ = \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\mathbf{P}(X_2 \in A_2). \end{aligned}$$

Ein handliches Kriterium für die Unabhängigkeit zweier diskreter Zufallsvariabler ist die Proportionalität der Zeilen* der Matrix ihrer gemeinsamen Verteilungsgewichte $\rho(a_1, a_2)$.

In der Tat ist das hinreichend: dann ist nämlich

$\rho(a_1, \cdot)$ (das ist die Zeile namens a_1) ja auch proportional zu $\rho_2(\cdot) := \sum_{a'_1 \in S_1} \rho(a'_1, \cdot)$ (das ist die Summe der Zeilen), also gilt

$$(*) \quad \rho(a_1, a_2) = k(a_1)\rho_2(a_2)$$

für irgendwelche nichtnegativen Zahlen $k(a_1)$.

Summiert man (*) über $a_2 \in S_2$, so erhält man $\rho_1(a_1) = k(a_1)$.

Damit wird (*) zur Produktformel von Folie 15.

Umgekehrt impliziert die Produktformel von Folie 15 die Proportionalität der Zeilen* der Matrix $(\rho(a_1, a_2))_{a_1 \in S_1, a_2 \in S_2}$ (Übung).

*oder auch der Spalten

2. Produktformel für Erwartungswerte

(Buch S. 61)

Sind X_1, X_2 unabhängig mit Werten in S_1 bzw. S_2 ,
dann gilt für Mengen $A_1 \subset S_1, A_2 \subset S_2$:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

Anders geschrieben:

$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_1}(X_1) \cdot \mathbf{1}_{A_2}(X_2)] = \mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_1}(X_1)] \mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_2}(X_2)]$$

In Worten:

Der Erwartungswert des Produktes von $\mathbf{1}_{A_i}(X_i)$, $i = 1, 2$
ist das Produkt der Erwartungswerte.

Wir werden gleich sehen, dass allgemeiner gilt:

Sind X_1, X_2 unabhängig,
und h_1, h_2 reellwertige “Verarbeitungen”, dann gilt:

Der Erwartungswert des Produktes $h_1(X_1) \cdot h_2(X_2)$
ist gleich dem Produkt der Erwartungswerte.

Genauer:

Satz:

X_1, X_2 unabhängige ZV'e mit Zielbereichen S_1, S_2 ,
 h_1, h_2 Abbildungen von S_1 bzw. S_2 in die reellen Zahlen.

Haben $h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$ endlichen Erwartungswert,
so folgt

$$\mathbf{E}[h_1(X_1)h_2(X_2)] = \mathbf{E}[h_1(X_1)] \mathbf{E}[h_2(X_2)] .$$

(“Produktformel für Erwartungswerte”)

Beweis für diskrete ZV'e:

$$\mathbf{E}[h_1(X_1)h_2(X_2)]$$

$$= \sum_{a_1, a_2} h_1(a_1)h_2(a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1, a_2} h_1(a_1)\mathbf{P}(X_1 = a_1) h_2(a_2)\mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1} h_1(a_1)\mathbf{P}(X_1 = a_1) \sum_{a_2} h_2(a_2)\mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \mathbf{E}[h_1(X_1)] \mathbf{E}[h_2(X_2)] \quad \square$$

3. Unabhängigkeit von mehreren Zufallsvariablen:

(Buch S. 64-66)

Zufallsvariable X_1, \dots, X_n mit Zielbereichen S_1, \dots, S_n
heißen

(stochastisch) *unabhängig*, falls für alle Ereignisse $\{X_i \in A_i\}$
folgende Produktformel gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbf{P}(X_n \in A_n) .$$

Unabhängigkeit von abzählbar unendlich vielen Zufallsvariablen:

Sei X_1, X_2, \dots eine Folge von Zufallsvariablen.

Definition:

Die Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots sind unabhängig
: \iff für jedes n sind X_1, \dots, X_n unabhängig.

Beispiele:

Fortgesetzter Münzwurf, fortgesetztes Würfeln

Für diskrete Zufallsvariable X_1, \dots, X_n
ist die **Unabhängigkeit** gleichbedeutend mit der
Produktform der Verteilungsgewichte:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) = \rho_1(a_1) \cdots \rho_n(a_n)$$

Die $\rho_i(a_i)$ sind dann die Verteilungsgewichte von X_i .

4. Unabhängigkeit von Ereignissen

(Buch S. 67)

Ereignisse E_1, \dots, E_n heißen **unabhängig**
: $\iff I_{E_1}, \dots, I_{E_n}$ sind **unabhängig**.

Satz:

Dafür reicht aus, dass

$$\mathbf{P}(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}) = \mathbf{P}(E_{i_1}) \cdots \mathbf{P}(E_{i_k})$$

für alle $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Einen eleganten Beweis führt man über eine Rechnung mit Indikatorvariablen (ähnlich wie bei der Einschluss-Ausschlussformel), vgl. Buch Seite 67.

Korollar zum vorigen Satz:

Die Unabhängigkeit zweier Ereignisse E_1, E_2
ist äquivalent zur Produktformel

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1) \mathbf{P}(E_2)$$

Und die **Unabhängigkeit dreier Ereignisse** E_1, E_2, E_3 ist äquivalent dazu, dass **beide** der folgenden **Bedingungen a) und b)** erfüllt sind:

$$\text{a) } \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2),$$

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_3),$$

$$\mathbf{P}(E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3).$$

$$\text{b) } \mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3)$$

a) oder b) allein reichen i.a. nicht für die Unabhängigkeit:

Beispiel:

(Z_1, Z_2) sei ein zweifacher $\frac{1}{2}$ -Münzwurf,

$$E_1 := \{Z_1 = 1\}, \quad E_2 := \{Z_2 = 1\},$$

$$E_3 := \{Z_1 = Z_2\}$$

E_1, E_2, E_3 sind paarweise unabhängig (warum?),

aber nicht unabhängig:

das Ereignis $E_1 \cap E_2$ zieht das Ereignis E_3 nach sich!

Also reicht Bedingung a) allein nicht
für die Unabhängigkeit der drei Ereignisse!

Auch Bedingung b) allein reicht nicht:

In den Übungen werden wir ein Beispiel von drei Ereignissen E_1, E_2, E_3 sehen, die nicht unabhängig sind, aber für die

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3)$$

gilt.

5. Unabhängigkeit von Teilbeobachtungen

(vgl. Buch S. 68, Bsp. 1)

Sind X_1 und X_2 unabhängig,

dann auch $h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$.

Denn:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(h_1(X_1) \in B_1, h_2(X_2) \in B_2) \\ &= \mathbf{P}(X_1 \in h_1^{-1}(B_1), X_2 \in h_2^{-1}(B_2)) \\ &= \mathbf{P}(X_1 \in h_1^{-1}(B_1))\mathbf{P}(X_2 \in h_2^{-1}(B_2)) \\ &= \mathbf{P}(h_1(X_1) \in B_1)\mathbf{P}(h_2(X_2) \in B_2). \quad \square \end{aligned}$$

Durch den Übergang zu
“Teilbeobachtungen” $h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$
können aber auch aus abhängigen Zufallsvariablen X_1, X_2
voneinander unabhängige Zufallsvariable
 $h_1(X_1), h_2(X_2)$ entstehen:

Gewisse **Teilaspekte** von **abhängigen** Zufallsvariablen
können **unabhängig** sein:

Beispiel:

(X_1, X_2) seien rein zufällige “Zwei aus $\{1, 2, \dots, 32\}$ ”.

Offenbar sind X_1 und X_2 nicht unabhängig.

Aber: die Ereignisse

$$E_1 := \{X_1 \in \{1, 9, 17, 25\}\}, \quad E_2 := \{1 \leq X_2 \leq 8\}.$$

sind **unabhängig**.

Denn

$$\mathbf{P}(E_1) = \frac{1}{8}, \quad \mathbf{P}(E_2) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \frac{1 \cdot 7 + 3 \cdot 8}{32 \cdot 31} = \frac{1}{32}.$$

Als Anknüpfung an Abschnitt 0 der heutigen Vorlesung geben wir hier auch noch die Tafel der 4 Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}(E_1 \cup E_2), \mathbf{P}(E_1 \cup E_2^c), \mathbf{P}(E_1^c \cup E_2), \mathbf{P}(E_1^c \cup E_2^c):$$

	E_2	E_2^c
E_1	$\frac{1 \cdot 7 + 3 \cdot 8}{32 \cdot 31}$	$\frac{1 \cdot 24 + 3 \cdot 23}{32 \cdot 31}$
E_1^c	$\frac{7 \cdot 7 + 21 \cdot 8}{32 \cdot 31}$	$\frac{7 \cdot 24 + 21 \cdot 23}{32 \cdot 31}$

Man sieht: Die Zeilen stehen im Verhältnis 1 : 7,
die Spalten stehen im Verhältnis 1 : 3.

Das kommt daher, dass der relative Anteil von A_1 in A_2 ebenso groß ist wie der von A_1 in A_2^c .

6. Positiv korrelierte Ereignisse

Was bedeutet die Beziehung

$$(*) \quad \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) > \mathbf{P}(E_1) \cdot \mathbf{P}(E_2) ?$$

Offenbar sind dann E_1 und E_2 nicht unabhängig.

Schreiben wir $\mathbf{P}(E_1) =: p_1$, $\mathbf{P}(E_2) =: p_2$. Dann ist

$$(*) \iff \mathbf{E}[I_{E_1}I_{E_2} - p_1p_2] > 0$$

$$\iff \mathbf{E}[I_{E_1}I_{E_2} - p_1I_{E_2} - p_2I_{E_1} + p_1p_2] > 0$$

$$\iff \mathbf{E}[(I_{E_1} - p_1)(I_{E_2} - p_2)] > 0.$$

E_1 und E_2 haben dann also die Tendenz,

gemeinsam einzutreten oder gemeinsam nicht einzutreten.

Man nennt solche Ereignisse E_1 und E_2 **positiv korreliert**.

7. Indirekte Abhängigkeiten

(vg. Buch S. 68, Bsp. 2)

Ein Beispiel für “indirekte Abhängigkeiten”:

Wir haben zwei gezinkte Münzen, mit $P(\text{Kopf} = 1) = 0.9$,
und eine faire Münze (mit $P(\text{Kopf} = 1) = 0.5$).

Jede der drei Münzen wird einmal geworfen; die Ausgänge
sind G , H für die gezinkten und F für die faire Münze.

Lernt man aus der Information, ob F so wie G ausfällt, etwas
für die Prognose, ob F so wie H ausfällt?

Vielleicht doch, denn:

Wenn F wie G ausfällt, fällt F eher als Kopf aus, und dann
fällt wohl H auch eher so aus wie F

Hier ist eine mathematische Analyse:

G und H seien einfache p -Münzwurfe,

F sei uniform verteilt auf $\{0, 1\}$; G, H, F seien unabhängig.

Dann gilt:

$$\mathbf{P}(G = F) = p\frac{1}{2} + q\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{analog: } \mathbf{P}(H = F) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}(G = F, H = F) = (p^2 + q^2)\frac{1}{2}$$

$$p^2 + q^2 = \frac{1}{2}((p + q)^2 + (p - q)^2) = \frac{1}{2}(1 + (p - q)^2) \geq \frac{1}{2},$$

mit “=” genau dann wenn $p = \frac{1}{2}$.

Für $p \neq \frac{1}{2}$ sind $\{G = F\}$ und $\{Y = F\}$ positiv korreliert!