

Vorlesung 11a

Markovketten (Teil 1)

1. Markovketten als spezielle mehrstufige Zufallsexperimente

(Buch S. 97)

Zur Erinnerung:

Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten

hat man für jedes $i = 1, 2, \dots$

Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(a_1 \dots a_i, a_{i+1}) = P_{a_1 \dots a_i}(X_{i+1} = a_{i+1}) ,$$

die angeben,

mit welcher Wahrscheinlichkeit in der $(i + 1)$ -ten Stufe

das Ereignis $\{X_{i+1} = a_{i+1}\}$ eintritt,

gegeben das Eintreten von $\{X_1 = a_1, \dots, X_i = a_i\}$.

Eine wichtige Beispielklasse mehrstufiger Zufallsexperimente:

alle X_i haben ein-und denselben Wertebereich S

und die Übergangswahrscheinlichkeiten der nächsten Stufe

hängen nur von der aktuellen Stufe ab

(und nicht von den vorhergehenden):

$$P(\dots a_{i-2} \textcolor{red}{a_{i-1}}, a_i) = \textcolor{red}{P}(a_{i-1}, a_i)$$

In dem Fall spricht man von einer **Markovkette**
auf dem Zustandsraum S mit Übergangsmatrix $\textcolor{red}{P}$.

Die Stufen sind jetzt mit $i = 0, 1, 2, \dots$ indiziert.

Man denkt sich die **Übergangsmatrix** P als fest
und notiert die **Verteilung** ρ von X_0 (die “Startverteilung”)
als Subskript bei der Wahrscheinlichkeit P .

Also insbesondere:

$$P_{\rho}(X_0 = a_0) = \rho(a_0).$$

Die Multiplikationsregel ergibt:

$$\begin{aligned} & P_{\rho}(X_0 = a_0, \dots, X_n = a_n) \\ &= \rho(a_0) P(a_0, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n) \end{aligned}$$

Startet die Kette in $a \in S$,
dann ist ρ die auf a konzentrierte Verteilung
(notiert als $\rho = \delta_a$).

Statt $\mathbf{P}_{\delta_a}$ schreibt man auch $\mathbf{P}_a$
und erhält

$$\mathbf{P}_a(X_0 = a) = 1,$$

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) = P(a, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n) .$$

2. Beispiele für Markovketten

(Buch S. 98)

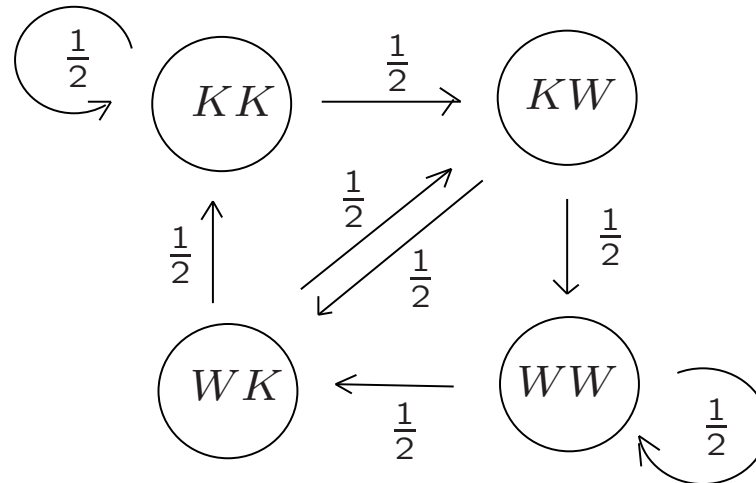
Beispiel 1:

Muster der Länge 2 beim fairen Münzwurf

$Z_0, Z_1, \dots$ unabhängig und uniform verteilt auf $\{K, W\}$,

$$X_n := (Z_n, Z_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Graph der Übergangswahrscheinlichkeiten:



Beispiel 2:
 (p, q) -Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$:

$$S = \mathbb{Z}$$

$$P(k, k + 1) = p, \quad P(k, k - 1) = 1 - p =: q$$

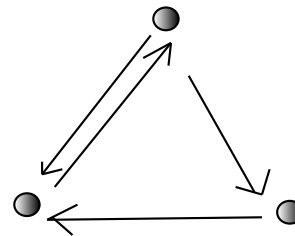
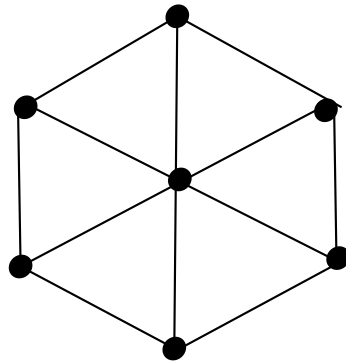
$$\mathbf{E}_a[X_n] = a + n(p - q)$$

$$\mathbf{Var}_a[X_n] = 4npq \quad (\text{Warum gilt das?})$$

Beispiel 3:

Einfache Irrfahrt

auf einem (ungerichteten oder gerichteten) Graphen



$S :=$ die Menge der Knoten.

Der nächste Schritt erfolgt jeweils
zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn.

Beispiel 4:

Die Pólya-Urne als Markovkette auf $\mathbb{N}^2$

$$S = \{(r, b) : r, b \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$$

$$P((r, b), (r + 1, b)) := \frac{r}{r + b},$$

$$P((r, b), (r, b + 1)) := \frac{b}{r + b}.$$

Das modelliert dieselbe Situation wie in Vorlesung 10b,
allerdings “sparsamer”:

als aktueller Zustand wird nicht der gesamte bisherige Pfad, sondern nur
die Anzahl der weißen und blauen Kugeln in der Urne mitgeführt

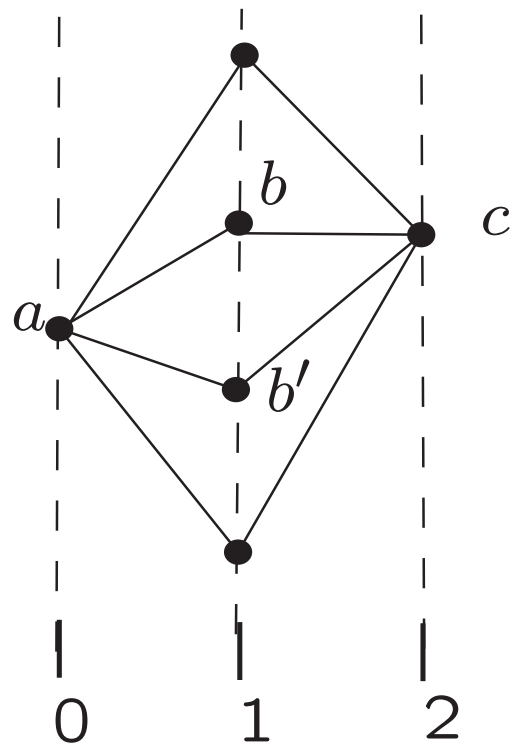
3. Die Zerlegung nach dem ersten Schritt

$$\mathbf{P}_a(X_1 = b, X_2 = c) = P(a, b)P(b, c).$$

Summation über $b \in S$:

$$\mathbf{P}_a(X_2 = c) = \sum_{b \in S} P(a, b)P(b, c)$$

“Zerlegung von zwei Schritten nach dem ersten Schritt”



Und jetzt für n statt 2:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_{a_0}(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n) \\ &= P(a_0, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n) \end{aligned}$$

Summation über $a_1, \dots, a_{n-1}$

mit $a := a_0, c := a_n$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_a(X_n = c) \\ = & \sum_{a_1, \dots, a_{n-1} \in S} P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, c) \end{aligned}$$

Zerlegung nach dem ersten Schritt.

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n) \\ &= P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n) \\ &= P(a, a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_1 = a_2, \dots, X_{n-1} = a_n) \end{aligned}$$

Summation über $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$,
mit b statt a_1 und c statt a_n :

$$\mathbf{P}_a(X_n = c) = \sum_{b \in S} P(a, b) \mathbf{P}_b(X_{n-1} = c) .$$

4. Treffwahrscheinlichkeiten

Eben haben wir die Kette in Gedanken laufen lassen
bis zu einem festen Zeitpunkt n .

Jetzt lassen wir sie laufen, bis sie
erstmal eine bestimmte Menge $C \subset S$ trifft,

und zerlegen wieder nach dem ersten Schritt.

Das eignet sich wunderbar zur Berechnung von
Treffwahrscheinlichkeiten.

Treffwahrscheinlichkeiten

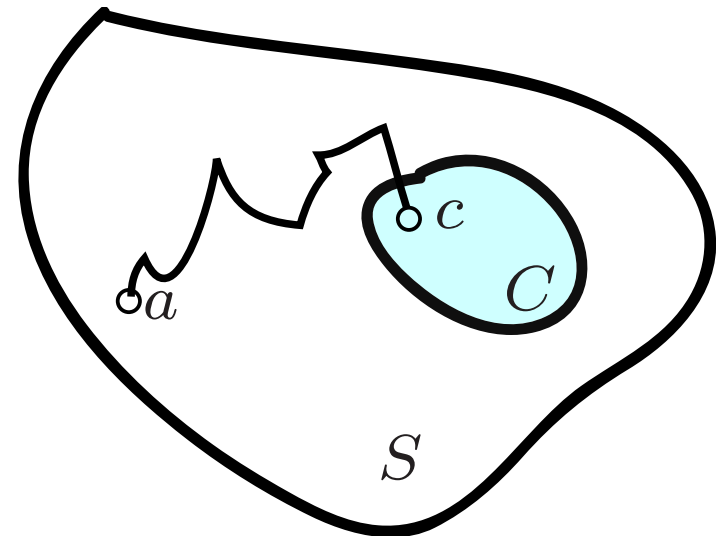
Die Frage:

P sei eine Übergangsmatrix auf der Menge S

X sei Markovkette mit Übergangsmatrix P .

$C \subset S$, $c \in C$ seien fest.

Wie wahrscheinlich ist es,
dass der in $a \in S$ startende Pfad
die Menge C erstmals
im Zustand c trifft?



Treffwahrscheinlichkeiten

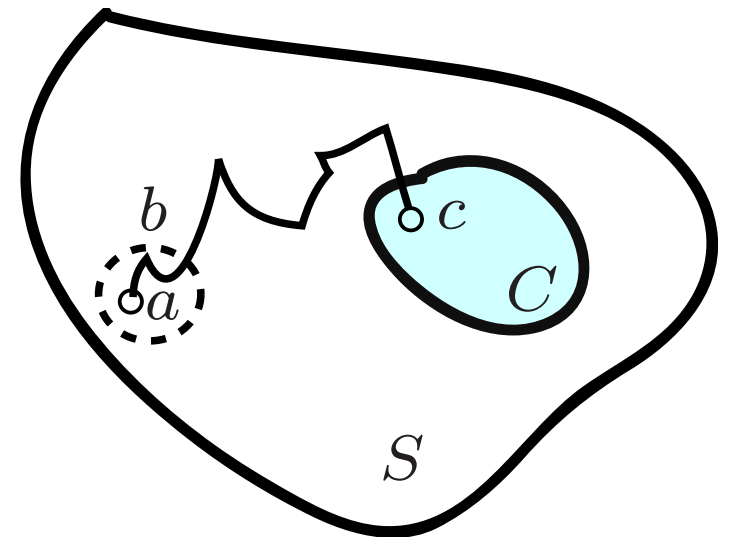
Die Antwort:

Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Zahlen $w(a)$, $a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a, b) w(b) = w(a)$$

für $a \in S \setminus C$



Treffwahrscheinlichkeiten

Die Antwort:

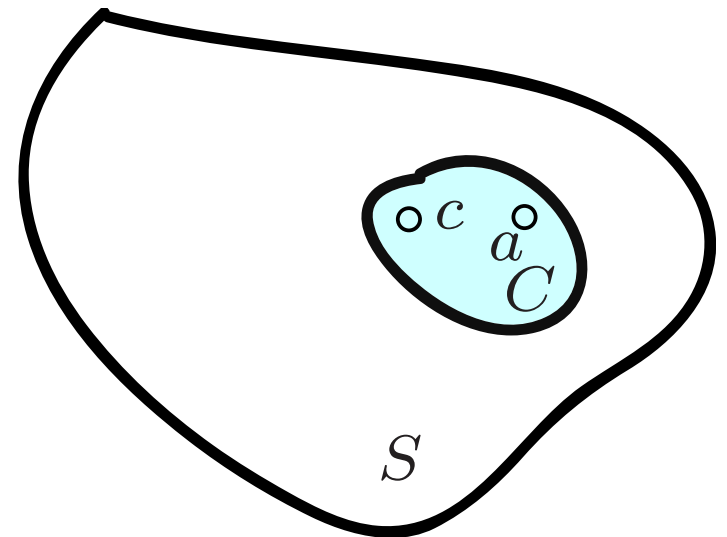
Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Zahlen $w(a)$, $a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a, b) w(b) = w(a)$$

für $a \in S \setminus C$,

$$w(a) = \delta_{ac} \quad \text{für } a \in C.$$



5. Beispiele

Beispiel A: Gewinn oder Ruin?

Eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ starte im Punkt 3.

Mit welcher W'keit erreicht sie den Punkt $c = 10$,
bevor sie zum Nullpunkt kommt?

“Zerlegung nach dem ersten Schritt” und Randbedingungen:

$$w(a) = \frac{1}{2}w(a-1) + \frac{1}{2}w(a+1), \quad a = 1, \dots, c-1,$$
$$w(0) = 0, \quad w(c) = 1.$$

Fazit: Die $w(a)$ liegen auf einer Geraden,

$$w(a) = \beta a + \gamma \quad \text{mit } \gamma = 0, \beta = 1/c.$$

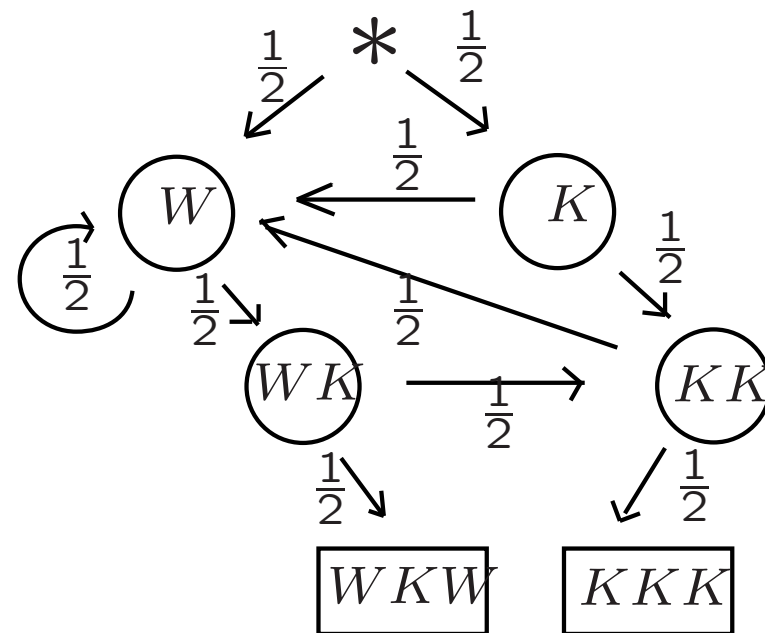
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $3/10$.

Beispiel B

Welches Muster kommt eher?

Mit welcher W'keit kommt beim fairen Münzwurf das Muster KKK früher als das Muster WKW ?

Hier ist ein
“reduzierter Graph”
der relevanten
Zustände
und Übergänge:

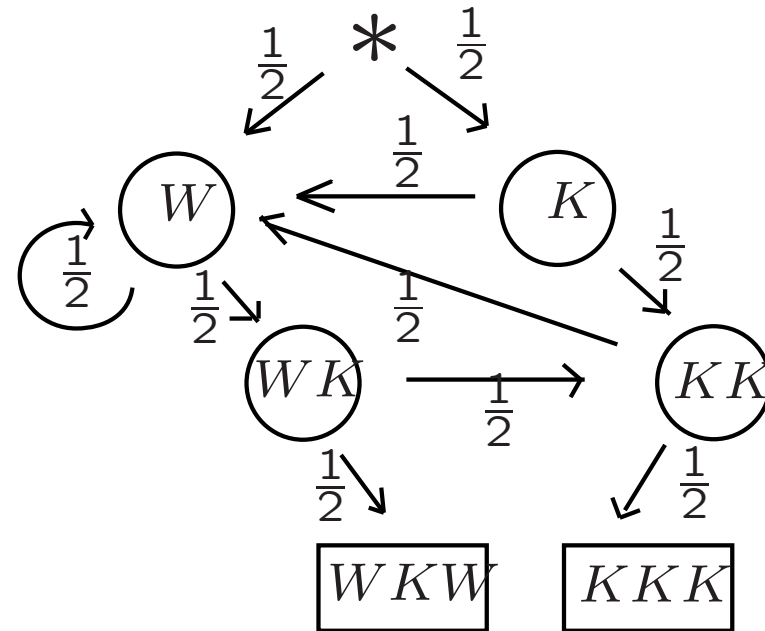


Für $w(a) :=$

$\mathbf{P}_a(\text{Spiel endet in } KKK)$

ergibt sich das

Gleichungssystem



$$w(KK) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}w(W) , \quad w(WK) = \frac{1}{2}w(KK)$$

$$w(K) = \frac{1}{2}w(KK) + \frac{1}{2}w(W) , \quad w(W) = \frac{1}{2}w(WK) + \frac{1}{2}w(W) .$$

und daraus

$$w(W) = \frac{1}{3}, \quad w(K) = \frac{1}{2}, \quad w(*) = \frac{1}{2}w(W) + \frac{1}{2}w(K) = \frac{5}{12} .$$