Vorlesung 10b

Mehrstufige Zufallsexperimente

1. Mehrstufigkeit und Multiplikationsregel

(Buch S. 94)

bisher Zweistufigkeit nur von “heute” zu “morgen”

jetzt zusätzlich von “heute & morgen” zu “übermorgen”, etc.

Für jedes $i = 1, \ldots, n-1$ hat man

Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(a_1 \ldots a_i, a_{i+1}) = \mathbf{P}_{a_1 \ldots a_i}(X_{i+1} = a_{i+1}) \; ,$$

die angeben,

mit welcher Wahrscheinlichkeit in der $(i+1)$-ten Stufe

das Ereignis $\{X_{i+1} = a_{i+1}\}$ eintritt,

gegeben das Eintreten von $\{X_1 = a_1, \ldots, X_i = a_i\}$.

Die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$

ergibt sich rekursiv als

Multiplikationsregel

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n)$$

$$= \mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_{n-1} = a_{n-1}) P(a_1 \ldots a_{n-1}, a_n)$$

Die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$

ergibt sich rekursiv als

Multiplikationsregel

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n)$$
$$= \mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_{n-1} = a_{n-1}) P(a_1 \ldots a_{n-1}, a_n)$$

Die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$

ergibt sich rekursiv als

Multiplikationsregel

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n)$$

$$= \mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_{n-1} = a_{n-1}) P(a_1 \ldots a_{n-1}, a_n)$$

$$= \cdots$$

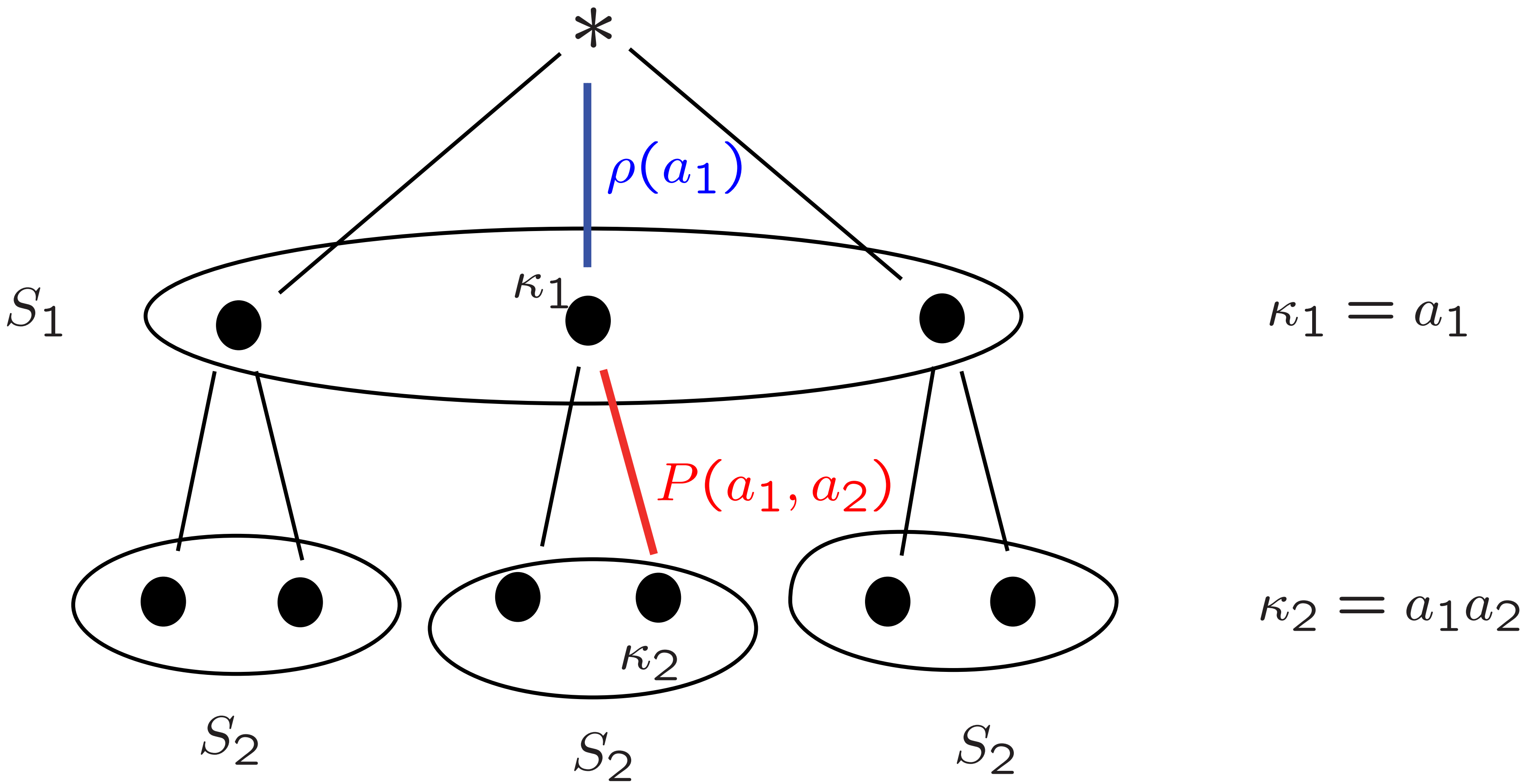
$$= \rho(a_1) P(a_1, a_2) \cdots P(a_1 \ldots a_{n-1}, a_n) \; .$$

2. Veranschaulichung von mehrstufigen Zufallsexperimenten durch Bäume

(Buch S. 95)

Wir erinnern uns an die

Veranschaulichung von zweistufigen Experimenten durch *Bäume*:



$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1) P(a_1, a_2)\,.$$

(Produkt der Kantengewichte von $*$ zum Knoten κ_2)

Was 2 recht ist, ist $i + 1$ billig:

$\kappa_i = a_1 \dots a_i$ ist ein *Knoten der Tiefe* i

Die *Nachfolger* von κ_i sind von der Form $\kappa_i \; a_{i+1}$

Die *Kanten* des Baums erhalten die Gewichte

$$g(*, \kappa_1) := \rho(a_1) \;, \quad g(\kappa_i, \kappa_{i+1}) := P(a_1 \dots a_i, a_{i+1})$$

mit $\kappa_1 = a_1, \;\; \kappa_i = a_1 \dots a_i, \;\; \kappa_{i+1} = a_1 \dots a_{i+1}$.

Die Wahrscheinlichkeit, in einem bestimmten Blatt zu enden,

ergibt sich als Produkt der Kantengewichte

entlang des Weges von der Wurzel zum Blatt.

3. Die Pólya-Urne

Oder

Wo Tauben sind, fliegen Tauben zu ....

(Buch S. 94)

In einer Urne befinden sich anfangs

eine rote und eine blaue Kugel.

In jedem Schritt wird eine Kugel rein zufällig gezogen und gemeinsam mit einer zusätzlichen Kugel derselben Farbe zurückgelegt.

Die Zufallsvariable Z_i mit Werten in $\{0, 1\}$ bezeichne die im i-ten Zug vorgefundene Farbe (0 für blau, 1 für rot).

Wir nennen dann $(Z_1, \ldots, Z_n)$ auch

eine (Standard-) *Pólya-Folge* der Länge n.

$$\mathbf{P}(Z_1 = 0) = \mathbf{P}(Z_1 = 1) = \tfrac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 0) = \tfrac{2}{3}$$

(das ist die W'keit, beim zweiten Zug blau zu ziehen,

wenn beim ersten Zug blau gezogen wurde)

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 1) = \tfrac{1}{3}$$

$$\mathbf{P}_{00}(Z_3 = 0) = \tfrac{3}{4}$$
$$\mathbf{P}_{01}(Z_3 = 0) = \tfrac{2}{4}$$

u. s. w.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$\mathbf{P}_{a_1\ldots a_i}(Z_{i+1} = a_{i+1}) = \frac{1+\ell}{2+i} \text{ mit } a_1, \ldots, a_i, a_{i+1} = 0, 1$$

und

$$\ell = \ell(a_1, \ldots, a_{i+1}) := \#\{j : 1 \le j \le i, a_j = a_{i+1}\} \; ;$$

$1 + \ell$ ist also die Zahl der Kugeln in der Urne nach i Zügen, deren Farbe mit der Farbe der $i+1$-ten gezogenen Kugel übereinstimmt.

Z. B. ist

$$\mathbf{P}\big((Z_1,\ldots,Z_8)=(1,1,0,1,0,0,1,1)\big)=\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{6}\,\frac{3}{7}\,\frac{4}{8}\,\frac{5}{9}$$

$$=\frac{5!\;3!}{9!}\,.$$

Für $0 \le k \le n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1,\ldots,a_n)$ mit $a_1+\cdots+a_n=k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$(*)\ \mathbf{P}\big((Z_1,\ldots,Z_n)=(a_1,\ldots,a_n)\big)=\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\binom{n}{k}^{-1}$$

Für $0 \leq k \leq n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1, \ldots, a_n)$

mit $a_1 + \cdots + a_n = k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\mathbf{P}\big((Z_1, \ldots, Z_n) = (a_1, \ldots, a_n)\big) = \frac{1}{n+1} \binom{n}{k}^{-1} .$$

Es gibt $\binom{n}{k}$ derartige Zugfolgen. Also ist

$$\mathbf{P}(Z_1 + \cdots + Z_n = k) = \frac{1}{n+1} , \quad k = 0, \ldots, n .$$

Fazit: Die Anzahl der

nach n Zügen hinzugekommenen roten Kugeln

ist uniform verteilt in $\{0, 1, \ldots, n\}$.

4. Pólya-Urne mit g Farben

(Buch S. 95)

Pólya-Urne mit g Farben:

Wieder wird in jedem Zug die gezogene Kugel zusammen mit einer gleichfarbigen Kugel zurückgelegt.

Die Anfangsbesetzung sei $(1, \ldots, 1)$, also je eine Kugel von jeder Farbe.

$X_{jn} :=$ # Zugänge der Farbe j nach n Schritten.

Sei $(k_1, \dots, k_g) \in S_{n,r}$,

d.h. $k_j \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + \cdots + k_g = n$.

Man sieht wie im Fall $g = 2$:

Alle möglichen Zugfolgen

von $(1, \dots, 1)$ nach $(1 + k_1, \dots, 1 + k_g)$

haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\frac{k_1! \cdots k_g!}{g \cdot (g+1) \cdots (n+g-1)} = \frac{k_1! \cdots k_g!}{(n+g-1)!}(g-1)!\,.$$

Alle möglichen Zugfolgen

von $(1, \ldots, 1)$ nach $(1 + k_1, \ldots, 1 + k_g)$

haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$k_1! \cdots k_g! \, \frac{(g-1)!}{(n+g-1)!} \; .$$

Es gibt $\binom{n}{k_1, \ldots, k_g} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_g!}$ solche Zugfolgen. Also ist

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{1n} = k_1, \ldots, X_{gn} = k_g) &= n! \frac{(g-1)!}{(n+g-1)!} \\ &= \frac{1}{\binom{n+g-1}{n}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(X_{1n} = k_1, \ldots, X_{gn} = k_g) = \frac{1}{\binom{n+g-1}{n}},$$

d.h. $(X_{1n}, \ldots, X_{gn})$ ist uniform verteilt auf $S_{n,g}$.

Fazit:

Die Pólya-Urne mit Anfangsbesetzung $(1, \ldots, 1)$

liefert

uniform verteilte Besetzungen!