Vorlesung 10a

Bedingte Verteilung,
bedingte Wahrscheinlichkeiten

1. Zerlegung der gemeinsamen Verteilung

(Buch S. 111)

Bisher legten wir das Hauptaugenmerk auf den

Aufbau der gemeinsamen Verteilung von X_1 und X_2

aus der Verteilung ρ von X_1

und Übergangswahrscheinlichkeiten $P(a_1, .)$:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) := \rho(a_1)P(a_1, a_2)$$

Jetzt:

Zerlegung der gemeinsamen Verteilung von X_1 und X_2

in die Verteilung von X_1

und die *bedingte Verteilung* von X_2 gegeben X_1

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\frac{\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)}{\mathbf{P}(X_1 = a_1)}$$

Sei X_1 eine diskrete Zufallsvariable mit Zielbereich S_1

und X_2 eine Zufallsvariable mit Zielbereich S_2.

Dann ist die

bedingte Wahrscheinlichkeit von $\{X_2 \in A_2\}$,

gegeben $\{X_1 = a_1\}$

definiert als

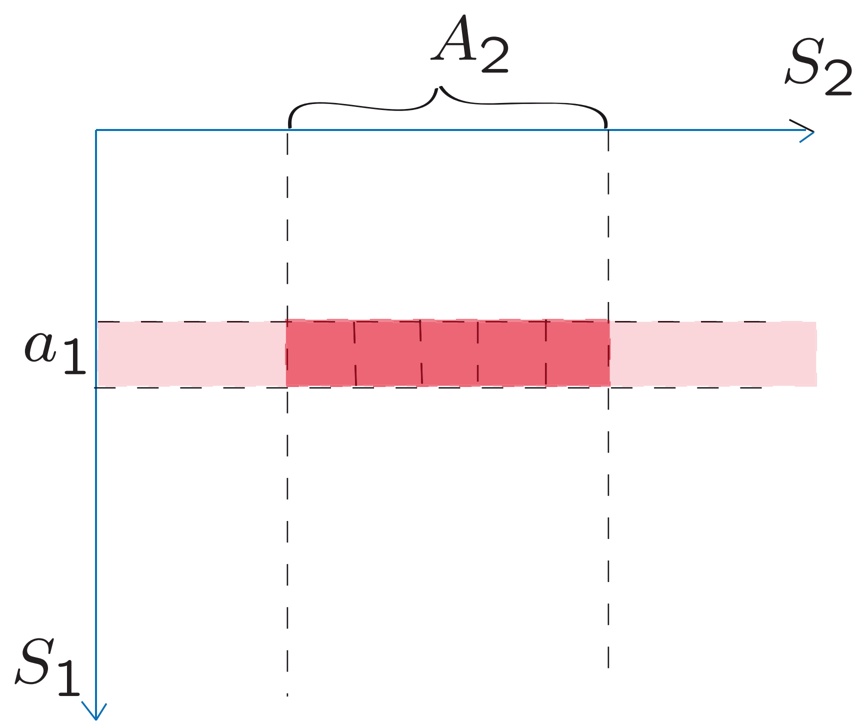
$$\mathbf{P}(X_2 \in A_2 \,|\, X_1 = a_1) := \frac{\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2)}{\mathbf{P}(X_1 = a_1)}\,.$$

In der Matrix der gemeinsamen Verteilungsgewichte

$$\nu(a_1, a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

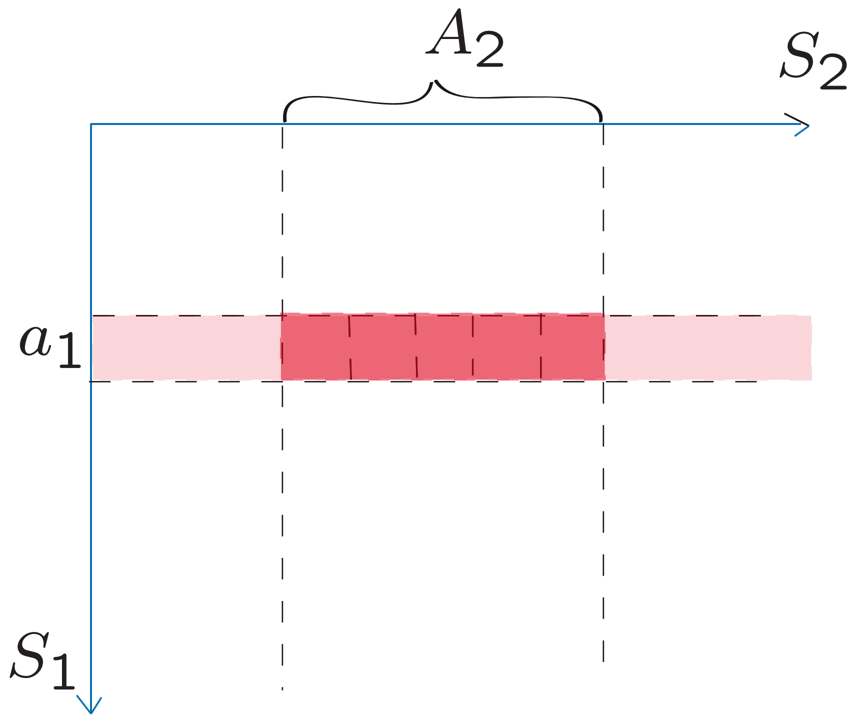
ist $\mathbf{P}(X_2 \in A_2 \,|\, X_1 = a_1)$ das relative Gewicht von A_2

bezogen auf das Gesamtgewicht der Zeile a_1



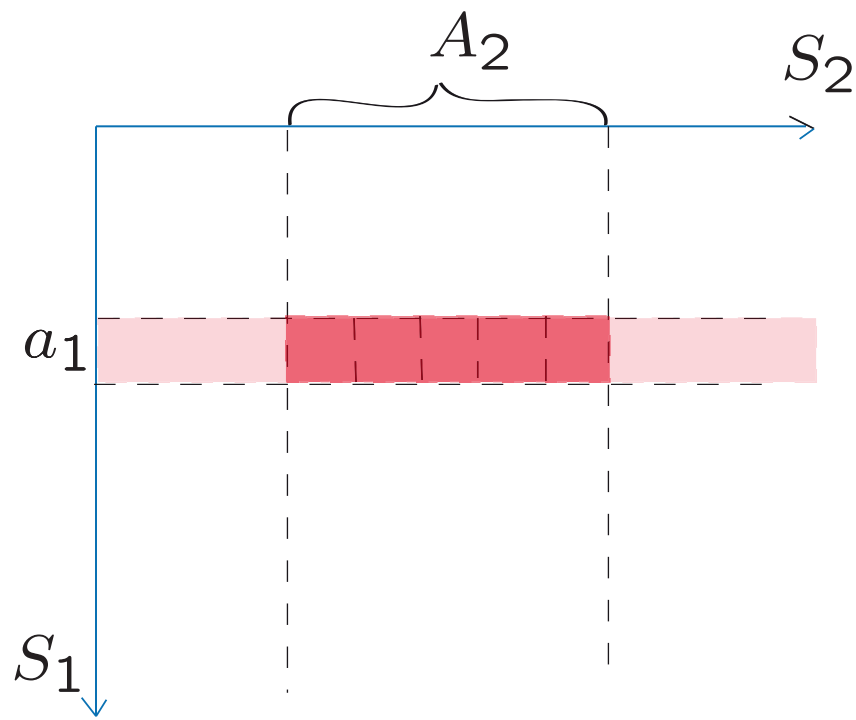
Die Verteilung $\mathbf{P}(X_2 \in \cdot \mid X_1 = a_1)$

heißt die *bedingte Verteilung von* X_2, *gegeben* $\{X_1 = a_1\}$.



Definieren wir Übergangswahrscheinlichkeiten durch

$$\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2) := \mathbf{P}(X_2 \in A_2 \,|\, X_1 = a_1)$$



Definieren wir Übergangswahrscheinlichkeiten durch

$$\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2) := \mathbf{P}(X_2 \in A_2 \,|\, X_1 = a_1)$$

dann bekommen wir die

aus den vorigen Vorlesungen vertraute Formel

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$

2. “Wie war der erste Schritt?”

(Buch S. 111-112)

Bei der Untersuchung von zwei Zufallsvariablen X_1, X_2

kann man immer

zu einer 2**-stufigen Betrachtungsweise** übergehen.

Man kann dabei wählen,

ob man X_1 als die erste Stufe auffasst oder als die zweite.

Beispiel:

Es seien Y und Z unabhängige $\mathbb{Z}$-wertige Zufallsvariable und

$$X_1 := Y, X_2 := Y + Z.$$

Wir haben gesehen:

Die bedingte Verteilung von $Y + Z$, gegeben $\{Y = a\}$,

ist die Verteilung von $a + Z$.

Was ergibt sich für die bedingte Verteilung von Y,

gegeben $\{Y + Z = b\}$?

“Wie war der erste Schritt?”

Die bedingte Verteilung von Y, gegeben $Y + Z = b$,

hat die Gewichte

$$\mathbf{P}(Y = a \,|\, Y + Z = b) = \frac{\mathbf{P}(Y = a)\,\mathbf{P}(Z = b - a)}{\mathbf{P}(Y + Z = b)} \,.$$

Ein instruktiver Spezialfall:

Y und Z seien unabhängig und Geom(p)-verteilt. Dann ist

$$\mathbf{P}(Y = a)\,\mathbf{P}(Z = b - a) = q^{a-1} p\, q^{(b-a)-1} p = p^2 q^{b-2}\,.$$

Dieses hängt nicht von a ab.

Also ist die bedingte Verteilung von Y gegeben $\{Y + Z = b\}$

die uniforme Verteilung auf $\{1, \dots, b-1\}$

Das ist auch ohne Rechnung plausibel:

Gegeben, dass in einem p-Münzwurf

der zweite Erfolg beim b-ten Versuch kommt,

ist der Zeitpunkt des ersten Erfolges

uniform verteilt auf $\{1, \ldots, b-1\}$.

3. “Wann kamen die erfolgreichen Würfe”?

Beispiel: Erfolgreiche Würfe beim Münzwurf

Bei einem 10-maligen p-Münzwurf sei

K die Anzahl der Erfolge,

und $G \subset \{1, \ldots, 10\}$ die zufällige Menge der Zeiten,

zu denen die Erfolge eintreten.

Wie ist die bedingte Verteilung von G, gegeben $\{K = 4\}$?

Für jede 4-elementige Teilmenge a von $\{1, \ldots, 10\}$ ist

$$\mathbf{P}(G = a, K = 4) = \mathbf{P}(G = a) = p^4(1-p)^6.$$

$$\mathbf{P}(G = a, K = 4) = \mathbf{P}(G = a) = p^4(1-p)^6$$

Das hängt nicht von a ab,

also ist $\mathbf{P}(G \in \cdot\,|K = 4)$

die uniforme Verteilung

auf den 4-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, 10\}$.

4. Bedingte Dichten

(Buch S. 112)

Ist $f(a_1, a_2)\, da_1\, da_2$ gemeinsame Dichte von X_1 und X_2

und $f_1(a_1)\, da_1$ Dichte von X_1,

dann setzen wir

$$\mathbf{P}(X_2 \in da_2 \,|\, X_1 = a_1) := \frac{f(a_1, a_2)}{f_1(a_1)}\, da_2$$

und sprechen von der

bedingten Dichte von X_2, gegeben $\{X_1 = a_1\}$.

Beispiel: Exponentialverteilte Summanden

Y und Z seien unabhängig und Exp(1)-verteilt.

Was ist die bedingte Dichte von Y, gegeben $\{Y + Z = b\}$?

Die gemeinsame Dichte von Y und $Y + Z$ ist

$$e^{-a}e^{-(b-a)}\, da\, db = e^{-b}\, da\, db, \quad 0 \le a \le b$$

Die Dichte von $Y + Z$ ist $\quad \left(\int_0^b da\right)e^{-b}\, db \quad = be^{-b}db$

Also:

$$\mathbf{P}(Y \in da \,|\, Y + Z = b) = \frac{1}{be^{-b}}\, e^{-b}\, da = \frac{1}{b}\, da, \quad 0 \le a \le b.$$

5. Bedingter Erwartungswert

In einem zweistufigen Experiment hatten wir

(vg. Vorlesung 9a, Abschnitt 1):

$$\mathbf{E}_{a_1}[h(X_1, X_2)] = \sum_{a_2 \in S_2} h(a_1, a_2)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)$$

Wegen

$$\mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2) = \mathbf{P}\big(X_2 = a_2 \,|\, X_1 = a_1\big)$$

ist damit die folgende Definition konsistent:

Bedingter Erwartungswert von $h(X_1, X_2)$*,*

gegeben $\{X_1 = a_1\}$:

$$\mathbf{E}\big[h(X_1, X_2) \,|\, X_1 = a_1\big]$$

$$:= \sum_{a_2 \in S_2} h(a_1, a_2)\, \mathbf{P}\big(X_2 = a_2 \,|\, X_1 = a_1\big)$$

Bedingte Erwartung von $h(X_1, X_2)$*, gegeben* X_1*:*

$$\mathbf{E}\big[h(X_1, X_2) \,|\, X_1\big] := e(X_1),$$

mit

$$e(a_1) := \mathbf{E}\big[h(X_1, X_2) \mid X_1 = a_1\big].$$

Zum Merken:

Der **bedingte Erwartungswert** von Y, gegeben $X = a$

(Symbol : $\mathbf{E}[Y \,|\, X = a]$ oder $\mathbf{E}_a[Y]$)

ist *der Erwartungswert unter der bedingten Verteilung*.

Im diskreten Fall ergibt sich

$$\sum_b b\,\mathbf{P}(Y = b \,|\, X = a),$$

und im Fall von Dichten hat man

$$\int b\,\frac{f(a,b)}{f_1(a)}\,db.$$

Beispiel:

$Z_1, \ldots, Z_{10}$ sei ein p-Münzwurf der Länge 10, $K := \sum_{i=1}^{10} Z_i$.

Die *Runs* in $(z_1, \ldots, z_{10})$ sind die

(in keinem größeren solchen Block enthaltenen)

Blöcke aus nur Nullen oder nur Einsen.

Z. B. hat $(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$ fünf Runs:

$0, 11, 00, 11, 000.$

Sei R die Anzahl der Runs in $(Z_1, \ldots, Z_{10})$.

Gefragt ist nach $\mathbf{E}[R|K = 4]$.

$$R = \sum_{i=1}^{n} I_{\{\text{beim } i\text{−ten Wurf beginnt ein Run}\}}$$
$$= 1 + \sum_{i=1}^{9} I_{\{Z_i \neq Z_{i+1}\}}.$$

Wir wissen aus Abschnitt 3:

Die bedingte Verteilung von $(Z_1, \dots, Z_{10})$ gegeben $K = 4$ entsteht so, dass man aus den Plätzen $1, \dots, 10$ rein zufällig 4 auswählt, auf die man die 4 Einsen setzt.

Damit folgt:

$$\mathbf{P}(Z_i \neq Z_{i+1} | K = 4) = 2 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \quad \text{(warum?)},$$

also ist der gesuchte Wert gleich $1 + 9 \cdot 2 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{29}{5}$.

6. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

(Buch S. 115-117)

Definition.

Seien E_1, E_2 Ereignisse. Dann ist die

bedingte Wahrscheinlichkeit von E_2, gegeben E_1,

definiert als

$$\mathbf{P}(E_2 \,|\, E_1) := \frac{\mathbf{P}(E_2 \cap E_1)}{\mathbf{P}(E_1)} = \mathrm{P}(I_{E_2} = 1 \,|\, I_{E_1} = 1)$$

. . . die Wahrscheinlichkeit von E_2, wenn man schon weiß, dass E_1 eingetreten ist.

Vertraute Formeln (für zweistufige Experimente)

im neuen Gewand:

Multiplikationsformel - hin und zurück:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)& \\ &= \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}(X_2 = a_2\,|X_1 = a_1) \\ &= \mathbf{P}(X_2 = a_2)\,\mathbf{P}(X_1 = a_1\,|X_2 = a_2)\end{aligned}$$

Formel für die totale Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbf{P}(X_2 = a_2) = \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}\big(X_2 = a_2 \mid X_1 = a_1\big)$$

$$\mathbf{P}(X_2 \in A_2) = \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}\big(X_2 \in A_2 \mid X_1 = a_1\big)$$

Zweistufigkeit - Spieß umgedreht:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1 \,|\, X_2 = a_2) = \frac{\mathbf{P}(X_2{=}a_2 \,|\, X_1{=}a_1)\mathbf{P}(X_1{=}a_1)}{\mathbf{P}(X_2{=}a_2)}$$

Formel von Bayes:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1 \,|\, X_2 = a_2) = \frac{\mathbf{P}(X_2{=}a_2 \,|\, X_1{=}a_1)\mathbf{P}(X_1{=}a_1)}{\sum_{a' \in S_1} \mathbf{P}(X_2{=}a_2 \,|\, X_1{=}a')\mathbf{P}(X_1{=}a')}$$

$$\mathbf{P}(E_1 \,|\, E_2) = \frac{\mathbf{P}(E_2 \,|\, E_1)\mathbf{P}(E_1)}{\mathbf{P}(E_2 \,|\, E_1)\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2 \,|\, E_1^c)\mathbf{P}(E_1^c)}$$

Beispiel: Bei einer bestimmten Reihenuntersuchung wird eine kranke Person in 100% der Fälle positiv getestet, eine gesunde Person in 1%.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Person wirklich krank ist?
Der Prozentsatz der kranken Personen sei 0.1% .

Hier ist erst einmal ein Rezept
für eine intuitive Überschlagsrechnung:

Beispiel:

Bei einer bestimmten Reihenuntersuchung wird
eine kranke Person in 100% der Fälle positiv getestet,
eine gesunde Person in 1%.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
dass eine positiv getestete Person wirklich krank ist?
Der Prozentsatz der kranken Personen sei 0.1%

In einer Population von 1000

sind 999 gesund und einer krank. Von den 999 Gesunden

werden ca 10 (falsch) positiv diagnostiziert.

Von 11 positiv Diagnostizierten

ist also im Schnitt nur einer krank.

Beispiel:

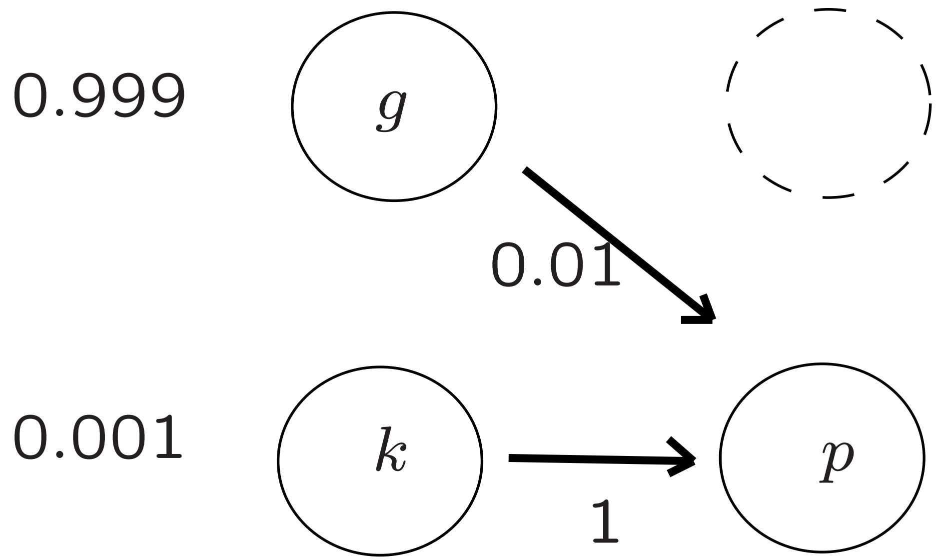
Bei einer bestimmten Reihenuntersuchung wird
eine kranke Person in 100% der Fälle positiv getestet,
eine gesunde Person in 1%.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
dass eine positiv getestete Person wirklich krank ist?
Der Prozentsatz der kranken Personen sei 0.1%

Hier ist eine Formalisierung:

X_1 sei der Gesundheitszustand $(S_1 = \{g, k\})$,

X_2 der Testbefund $(S_2 = \{p, n\})$

(X_1, X_2) entsteht über ein zweistufiges Experiment:



$$\mathbf{P}(X_1 = k \,|\, X_2 = p) = \frac{\mathbf{P}(X_1 = k, X_2 = p)}{\mathbf{P}(X_2 = p)}$$

$$= \frac{0.001 \cdot 1}{0.999 \cdot 0.01 + 0.001 \cdot 1} \approx \frac{1}{11}$$

7. Gedächtnislosigkeit der geometrischen und der Exponentialverteilung

(Buch S. 116)

Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung:

T sei Geom(p)-verteilt. Dann gilt

$$\mathbf{P}(T > k + \ell \,|\, T > k) = q^{k+\ell}/q^k = q^\ell \,.$$

Die bedingte Verteilung von $T - k$, gegeben $\{T > k\}$, ist somit gleich Geom(p).

Die Kenntnis, dass T einen Wert größer als k annimmt, ändert also die Verteilung für die “restliche Wartezeit” nicht.

Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung

Für exponentialverteiltes T zum Parameter λ gilt für $r, s > 0$

$$\mathbf{P}(T > r + s \,|\, T > r) = e^{-\lambda s} \,.$$

Die bedingte Verteilung von $T - s$, gegeben $\{T > s\}$,
ist somit gleich Exp(λ).

Die Kenntnis, dass T einen Wert größer als r annimmt,
ändert also die Verteilung für die “restliche Wartezeit” nicht.