Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 21. Dezember 2018, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

33. Das zufällige Paar (X_1, X_2) mit Werten in $\{1,2\} \times \{b,c,d\}$ komme durch ein zweistufiges Experiment zustande, wobei $\mathbf{P}(X_1 = 1) = 2\mathbf{P}(X_1 = 2)$ gelte und die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(a_1, .)$, $a_1 \in \{1,2\}$, durch die rechts angegebene Matrix bestimmt sind.

	b	c	d
1	0.4	0.4	0.2
2	0.1	0.2	0.7

(i) Finden Sie die Matrix der gemeinsamen Verteilungsgewichte von (X_1, X_2) sowie die Verteilungsgewichte von X_2.
(ii) Finden Sie Übergangswahrscheinlichkeiten $Q(a_1, .)$, $a_1 \in \{b,c,d\}$, sodass (X_1, X_2) als zweistufiges Zufallsexperiment entsteht.
(iii) Berechnen Sie die bedingten Erwartungswerte $\mathbf{E}_{a_2}[X_1]$ jeweils für $a_2 = b$, $a_2 = c$ und $a_2 = d$.
(iv) Finden Sie die im Sinn des erwarteten quadratischen Fehlers beste Prognose von X_1 auf der Basis von X_2, d.h. diejenige Funktion $e : \{b,c,d\} \to \mathbb{R}$, für die $\mathbf{E}[(X_1 - e(X_2))^2]$ minimal wird. (Geben Sie dazu die drei Fuktionswerte $e(b)$, $e(c)$ und $e(d)$ an.)

34. 15 Namen sind in 5 Listen einsortiert. Die Längen $Z_1, \ldots, Z_5$ der Listen sind identisch verteilt und haben Varianz 16. Die Suchtiefen der in Liste j einsortierten Namen sind $0, 1, \ldots, Z_j - 1$.
a) Finden Sie $\mathbf{E}[Z_j]$.
b) Aus den 15 Namen wird rein zufällig einer gewählt. Berechnen Sie den Erwartungswert seiner Suchtiefe.

35.S. X sei uniform verteilt auf $[-1, 2]$, Z sei $\mathrm{N}(0,1)$-verteilt und unabhängig von X. Es sei $Y := X^2 + \sigma Z$, mit $\sigma > 0$.
a) Finden Sie die im Sinn des erwarteten quadratischen Fehlers
i) beste ii) beste affin lineare
Prognose von Y auf der Basis von X,
d.h. jeweis eine Funktion $e : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, für die $\mathbf{E}[(Y - e(X))^2]$ minimal wird, wobei in ii) die Form $e(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ verlangt wird.
b) Was ist jeweils der erwartete quadratische Prognosefehler $\mathbf{E}[(Y - e(X))^2]$?

36.S Aus (der Vereinigung von) drei Populationen, deren Größen im Verhältnis 1 : 2 : 3 stehen, wird rein zufällig ein Individuum J gewählt und eine reelles Merkmal $h(J)$ beobachtet. In den drei Populationen ist das Merkmal der Individuen jeweils uniform verteilt auf einem Intervall, und zwar in der kleinsten Population auf dem Intervall $[20, 50]$, in der mittelgroßen Population auf $[30, 40]$, und in der größten auf $[20, 40]$. Berechnen Sie $\mathbf{Var}[h(J)]$, sprich die Varianz des Merkmals in der Gesamtpopulation.