Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 8. Dezember 2018, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

25.S Was ist die maximale Zahl n von Versuchen in einem Bernoulli-Experiment mit Misserfolgswahrscheinlichkeit $q = 0.1$, für welche die Wahrscheinlichkeit, mehr als 20 Misserfolge zu erzielen, nicht größer als 0.025 ist?
a) Berechnen Sie hierzu erst einmal eine Näherung für n, indem Sie die zufällige Anzahl X_n der Misserfolge durch eine normalverteilte Zufallsvariable X mit Erwartungswert $\mathbf{E}[X_n]$ und Varianz $\mathbf{Var}[X_n]$ approximieren und mit $\mathbf{P}(X > 20) \leq 0.025$ rechnen.
b) Finden Sie das exakte n, indem Sie das Ergebnis aus a) mittels des R-Befehls `pbinom` überprüfen/verfeinern.[1]
c) Welche Näherung für n bekommen Sie, wenn Sie wie in a) vorgehen, jedoch anstelle der Bedingung $\mathbf{P}(X > 20) \leq 0.025$ mit $\mathbf{P}(X > 20.5) \leq 0.025$ rechnen?

26. X_1, X_2 seien unabhängig und uniform auf $[0, 1]$ verteilt; wir setzen $Y := X_1 + X_2$.
i) Berechnen Sie $\mathbf{P}(X_1 - X_2 > b)$ und $\mathbf{P}(X_1 - X_2 < -b)$ für $0 \leq b \leq 1$.
ii) Berechnen Sie $\mathbf{P}(Y - \mu_Y > b)$ und $\mathbf{P}(Y - \mu_Y < -b)$ für $0 \leq b \leq 1$. *(Hinweis: Verwenden Sie, dass (X_1, X_2) so verteilt ist wie $(X_1, 1 - X_2)$.)*
iii) Skizzieren Sie die Dichte von Y.
(iv) Welche Zahlenwerte ergeben sich für $\mathbf{P}(|Y - \mu_Y| > \sigma_Y)$ bzw. $\mathbf{P}(|Y - \mu_Y| > 2\sigma_Y)$?

27.S $Y_1, \dots, Y_{100}$ seien unabhängig und standard-exponentialverteilt. Finden Sie μ und $\delta > 0$ so, dass die Zufallsvariable $\frac{1}{100}(Y_1 + \cdots + Y_{100})$ mit Wahrscheinlichkeit ≈ 0.99 in das Intervall $[\mu - \delta, \mu + \delta]$ fällt. Dabei ist der R-Befehl `qnorm` hilfreich.[2]

28. X und Y seien unabhängig und standard-normalverteilt. Zeigen Sie, dass $X^2 + Y^2$ Exp(1/2)-verteilt ist. Dabei dürfen Sie verwenden, dass für die Kreisscheibe $K := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq b\}$ mit Radius $\sqrt{b}$ gilt:

$$\int_K e^{-(x^2+y^2)/2} dx\, dy = \int_0^{\sqrt{b}} e^{-r^2/2}\, 2\pi r\, dr.$$

[1] $\texttt{pbinom}(b, n, p) = \mathbf{P}(Y \leq b)$ für Binom(n, p)-verteiltes Y.
[2] $\texttt{qnorm}(p) = \Phi^{-1}(p)$.