Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 1. Dezember 2018, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

21. S Die Kreisfläche mit Radius 10 um den Ursprung des $\mathbb{R}^2$ wird beschrieben durch $S := \{(a_1, a_2) : \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \leq 10\}$. Es sei R der Abstand eines uniform aus S gewählten Punktes vom Ursprung.
a) Berechnen Sie
(i) die Verteilungsfunktion (ii) die Dichte (iii) den Erwartungswert (iv) die Standardabweichung von R.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt R in das Intervall $[\mu_R - \sigma_R, \mu_R + \sigma_R]$?
c) Bestimmen Sie die Zahl r_0 so, dass der uniform aus der Kresifläche gewählte Punkt mit Wahrscheinlichkeit 0.95 einen Abstand $\leq r_0$ vom Ursprung hat.

22. a) Es sei $(Z_1, Z_2, \ldots)$ ein fortgesetzter fairer Münzwurf. Wir betrachten die beiden Zufallsvariablen $V := \sum_{i=1}^{3} Z_i 2^{-i}$ und $U := \sum_{i=1}^{\infty} Z_i 2^{-i}$.
a) Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen V.
b) Es sei x eine dyadisch rationale Zahl der Form $x = \sum_{i=1}^{n} y_i 2^{-i}$, mit $n \in \mathbb{N}$ und $y_i \in \{0, 1\}$. Bestimmen Sie $\mathbf{P}(U \leq x)$.
c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von U. Dabei dürfen Sie verwenden, dass *jede* Verteilungsfunktion F rechtsseitig stetig ist, d.h. $\lim_{n\to\infty} F(a_n) = F(a)$ erfüllt für $a_n \downarrow a$.

23. Z_1, $Z_2, \ldots$ seien unabhängig mit $\mathbf{P}(Z_k = 1) = 1/k$, $\mathbf{P}(Z_k = 0) = 1 - 1/k$ für $k = 1, 2, \ldots$. Es sei $X_n := Z_1 + \cdots + Z_n$. Zeigen Sie mit der Ungleichung von Chebyshev, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left| \frac{X_n}{\ln n} - 1 \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

Dabei dürfen Sie verwenden, dass für die n-te harmonische Zahl $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ gilt:

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln n + 1.$$

24. S. X_1 sei Exp(λ_1)-verteilt, X_2 sei Exp(λ_2)-verteilt, und X_1, X_2 seien unabhängig.
a) Berechnen Sie $\mathbf{P}(\min(X_1, X_2) > a)$, $a > 0$. Können Sie die Verteilung von $\min(X_1, X_2)$ “beim Namen nennen”?
b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion, die Dichte und den Erwartungswert von $\max(X_1, X_2)$.