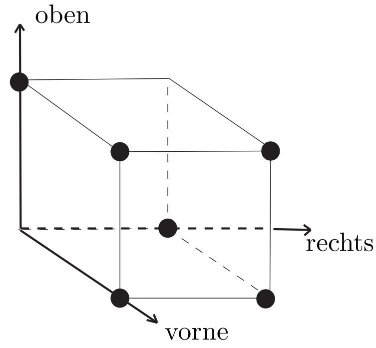
Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 24. November 2018, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

17. ***Paarweise Unabhängigkeit von Ereignissen.*** $X = (X_1, X_2, X_3)$ mit Wertebereich $\{o, u\} \times \{\ell, r\} \times \{h, v\}$ beschreibe eine rein zufällige Wahl aus den 6 in der Skizze markierten Ecken des Würfels (die beiden nicht markierten Ecken bleiben tabu). Vier der markierten Ecken sind "vorne", drei sind "rechts" und drei sind "oben". Wir betrachten die Ereignisse
$E_1 := \{X_1 = o\} = \{X \text{ landet oben}\}$,
$E_2 := \{X_2 = r\} = \{X \text{ landet rechts}\}$,
$E_3 := \{X_3 = v\} = \{X \text{ landet vorne}\}$.



a) Bestimmen Sie die 2×2-Matrix der Verteilungsgewichte von (X_1, X_2). Sind E_1 und E_2 unabhängig? Sind sie positiv korelliert?
b) Gilt $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1) \cdot \mathbf{P}(E_2) \cdot \mathbf{P}(E_3)$?

18. S. Für $a \in \mathbb{N}_0$ ist $\binom{a}{2}$ die Anzahl der Paare (i, j) mit $1 \le i < j \le a$, also $\binom{a}{2} = \sum_{1 \le i < j < \infty} \mathbf{1}_{[0,a]}(j)$.
(i) Es sei X eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable. Begründen Sie

$$X(X-1) = 2 \sum_{1 \le i < j < \infty} I_{\{j \le X\}} = 2 \sum_{k \ge 1} k I_{\{X > k\}}.$$

(ii) Folgern Sie, dass für eine Geom(p)-verteilte Zufallsvariable Y gilt: $\mathbf{E}[Y(Y-1)] = 2q/p^2$. Dabei dürfen Sie verwenden, dass die Additivität des Erwartungswertes auch für abzählbar unendlich viele nichtnegative Zufallsvariable gilt.
(iii) Es sei T_n der Zeitpunkt des n-ten Erfolges in einem fortgesetzten p-Münzwurf. Berechnen Sie $\mathbf{Var}[T_n/n]$.

19. S. Wir betrachten eine Gesamtheit aus $g = 100$ Städten, nummeriert mit $j = 1, \dots, 100$. Sei
$h(j)$ die Einwohnerzahl ("Größe") der Stadt Nr. j,
$h(J)$ die Größe einer rein zufällig ausgewählten Stadt J,
$\mu := \mathbf{E}[h(J)] = \frac{1}{g} \sum_{j=1}^{g} h(j)$ der Mittelwert,
$\sigma := \sqrt{\mathbf{Var}[h(J)]} = \sqrt{\frac{1}{g} \sum_{j=1}^{g} (h(j) - \mu)^2}$ die Streuung der Größen in der Gesamtheit der Städte.
Die Städte werden in rein zufälliger Reihenfolge aufgerufen ("ohne Zurücklegen gezogen"), dabei ist J_i die beim i-ten Zug aufgerufene Stadt, $X_i := h(J_i)$ ihre Größe und $(J_1, \dots, J_g)$ eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, g$.
a) Bestimmen Sie die Verteilungsgewichte von (J_5, J_7). Ist (J_5, J_7) so verteilt wie (J_1, J_2)?
b) Ist (X_5, X_7) so verteilt wie (X_1, X_2)?
c) Ist $\mathbf{Cov}[X_5, X_7] = \mathbf{Cov}[X_1, X_2]$?
d) Stellen Sie $\mathbf{Var}[X_1 + \cdots + X_g]$ auf zweierlei Weise dar[1] und bestimmen Sie daraus $\mathbf{Cov}[X_1, X_2]$.
e) Um welchen Faktor reduziert sich $\sqrt{\mathbf{Var}\left[\frac{1}{30}(X_1 + \ldots + X_{30})\right]}$ im Vergleich zu $\sigma/\sqrt{30}$?

20. a) Es sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit Wertebereich S, und $A \subset S$. Begründen Sie, warum $Z_i := \mathbf{1}_A(X_i)$, $i = 1, 2, \dots$, ein p-Münzwurf ist, mit $p := \mathbf{P}(X_1 \in A)$.
b) Lösen Sie damit die Aufgabe 8b noch einmal auf kurzem Wege, jetzt ohne irgend eine Induktion oder sonstige große Rechnung.

[1] ähnlich dem in der Vorlesung diskutierten Beispiel mit der Gesamtzahl der roten Kugeln in der Urne