Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 16. November 2018, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

13. n Objekte werden per wiederholtem Würfeln auf n^2 Plätze gesetzt (man erinnere sich an die Situation in Vorlesung 1b)).
a) Berechnen Sie den Erwartungswert (i) der Anzahl der Paarkollisionen (ii) der Anzahl der Dreifachkollisionen.
b) Zeigen Sie, dass für $n \to \infty$ die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Dreifachkollision passiert, gegen Null konvergiert.
c) Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und für $n \to \infty$ die Wahrscheinlichkeit, dass es genau k Paarkollisionen gibt, gegen das Poissongewicht $\frac{1}{k!}(\frac{1}{2})^k e^{-\frac{1}{2}}$ konvergiert. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:
(i) Begründen Sie zuerst: Die Anzahl der Möglichkeiten, k Paare aus $n \geq 2k$ Objekten (ohne Reihung) auszuwählen, ist

$$A := \frac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{2^k k!}$$

(ii) Die Anzahl der "Würfelprotokolle", die genau k paarweise Kollisionen ergeben, ist gleich dem Produkt $ABCD$, mit A wie in (i), $B :=$ die Anzahl der Möglichkeiten, k aus n^2 Plätzen ohne Reihenfolge auszuwählen, $C :=$ die Anzahl der Reihenfolgen, die $2k$ ausgewählten Paare auf die k ausgewählten Plätze zu setzen, und $D :=$ die Anzahl der Möglichkeiten, die verbleibenden $n-2k$ Objekte kollisionsfrei auf die verbleibenden n^2-k Plätze zu setzen.
(iii) Schließlich dürfen Sie dann noch – hier ohne Beweis – die folgende (mittlels linearer Approximation von $\ln(1+h)$ mit quadratischem Restglied nicht schwer zu beweisende) Aussage verwenden: Werden m Objekte per wiederholtem Würfeln auf $g(m)$ Plätze gesetzt und gilt $m^2/g(m) \to 1$, dann konvergiert die W'keit für Kollisionsfreiheit für $m \to \infty$ gegen $e^{-1/2}$.

14. S. Wie wahrscheinlich ist es, beim 10-maligen gewöhnlichen Würfeln mindestens eine der 6 Augenzahlen nie zu würfeln? (Hinweis: Betrachten Sie für $i = 1, \ldots, 6$ das Ereignis $E_i :=$"die Augenzahl i wird nie gewürfelt" und verwenden Sie die Einschluss-Ausschluss-Regel.)

15. Aus einer Population, in der jedes Individuum genau einen von 10 Typen hat und alle Typen in gleichen Anteilen vorkommen, wird mit Zurücklegen gezogen.
a) Angenommen unter den ersten 5 Zügen kommen genau 2 Typen vor. Wie ist (ab dann) die Anzahl der Züge verteilt, bis erstmals ein Individuum gezogen wird, dessen Typ verschieden von den bisher gezogenen ist?
b) Berechnen Sie (jetzt nicht mehr unter der Annahme von a)) den Erwartungswert der Anzahl der Züge, die es braucht, bis erstmals alle Typen in der Stichprobe vorkommen.
c) Wie in der ersten Stunde werfen wir wiederholt rein zufällig Punkte ins Einheitsquadrat, jede Sekunde einen. Das Einheitsquadrat sei unterteilt in r^2 Teilquadrate des Flächeninhaltes r^{-2}, wobei r eine natürliche Zahl ist. Was ist die erwartete Anzahl der Punkte, die es braucht, bis jedes der r^2 Teilquadrate einen Punkt abbekommt? Finden Sie dafür für großes r eine Näherung, in der der natürliche Logarithmus von r vorkommt.

16. S. Wir sind in der Situation von A 15 c), mit $r = 100$.
a) Berechnen Sie mittels der Exponentialapproximation die Verteilung der Wartezeit (in der Stundenskala) bis zum ersten Treffer des linken unteren Teilquadrats. Wie wahrscheinlich ist es (gemäß dieser Approximation), dass der erste Treffer
(i) länger als eine Stunde
(ii) länger als fünf Stunden
auf sich warten lässt?
b) Berechnen Sie mit der Poissonapproximation die Wahrscheinlichkeit, dass das linke untere Teilquadrat in der zweiten Stunde genau dreimal getroffen wird.