Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 9. November 2018, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

9. a) Ein Fehlstand in einer Permutation $a = (a(1), \dots, a(n))$ ist ein Paar (i, j) mit $i < j$ und $a(i) > a(j)$. Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Fehlstände einer rein zufälligen Permutation von $1, \dots n$,
(i) indem Sie diese Anzahl als Summe von mit (i, j) indizierten Zählern darstellen,
(ii) über das in Aufgabe 5 d) gewonnene rekursive Verfahren.
b) Berechnen Sie die erwartete Anzahl der Zyklen in einer rein zufälligen Permutation von $1, \dots n$ über das in Aufgabe 5 a) diskutierte rekursive Verfahren.

10. Eine Folge X der Länge 500 mit Einträgen X_i aus dem Alphabet A, C, G, T komme durch ein (p_A, p_C, p_G, p_T)-Würfeln zustande, wobei $p_A = p_G = 1/4$, $p_C = 1/3$, $p_T = 1/6$ gelte.
a) Berechnen Sie $\mathbf{P}(X_1 = X_2)$.
b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Runs von X. (Dabei ist ein *Run* ein Block der Form $(X_i, X_{i+1}, \dots, X_j)$ mit $X_i = X_{i+1} = \dots = X_j$, welcher nicht zu einem längeren Block dieser Form erweitert werden kann.)

11. S Ein Kartenstapel bestehend aus 10 roten und 50 blauen Karten wird perfekt gemischt, dann werden alle 60 Karten der Reihe nach aufgeschlagen (die oberste zuerst ...).
a) Wie wahrscheinlich ist es, dass die erste und die zehnte aufgeschlagene Karte rot ist, die fünfte aufgeschlagene Karte jedoch blau?
b) Wie wahrscheinlich ist es, dass von den 3 als erste, fünfte und zehnte aufgeschlagenen Karten genau zwei rot sind? Stellen Sie die Beziehung zu einem hypergeometrischen Verteilungsgewicht her.
c) Für je 3 unmittelbar nacheinander aufgeschlagene Karten mit der Farbfolge “rot, blau, rot” bekommen Sie 10 €. (Wenn also die ersten 5 aufgeschlagenen Karten die Farben “rot, blau, rot, blau, rot” haben, klingeln schon 20 € in Ihrer Kasse, und vielleicht werden es ja noch mehr...) Ihr Spielgebühr ist 15 €. Berechnen Sie den Erwartungswert Ihres Gewinns.

12. S Denken wir uns einen Fachbereichsrat (FBR), der aus 9 Vertretern der Informatik und 8 der Mathematik besteht. In einem 5-köpfigen Komitee des FBR findet sich nur ein Vertreter der Informatik. Wie wahrscheinlich ist eine so extreme Zusammensetzung bei einer rein zufälligen Auswahl? Genauer: Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass *die Anzahl X der Informatiker in einem rein zufällig gebildeten 5-köpfigen Komitee des FBR* mindestes so weit entfernt von $\mu := \mathbf{E}[X]$ ist wie die beobachtete Anzahl 1?