

Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 2. November 2018, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

5. Für die Zyklendarstellung einer Permutation hat sich eine suggestive Schreibweise eingebürgert, die schon an einem Beispiel einsichtig wird: Die Zyklendarstellung der in der Vorlesung betrachteten Permutation $5, 2, 7, 3, 1, 4, 6$ von $1, \dots, 7$ schreibt man als $(1\ 5)(2)(3\ 7\ 6\ 4)$.

Wir beschreiben jetzt ein rekursives Verfahren zur Erzeugung einer zufälligen Permutation von $1, \dots, n+1$ aus einer Permutation von $1, \dots, n$, ausgehend von deren Zyklendarstellung: *Das Element $n+1$ wird jeweils mit W'keit $\frac{1}{n+1}$ auf einen der n Plätze rechts neben $1, 2, \dots, n$ (innerhalb des jeweiligen Zyklus) gesetzt. Ebenfalls mit W'keit $\frac{1}{n+1}$ wird das Element $n+1$ in einen neuen Zyklus (der Länge 1) gesetzt.*

- a) Zeichnen Sie (in Form eines Baumes) die 6 Pfade, die, ausgehend vom trivialen Zyklus (1) , zu den 6 Permutationen von $1, 2, 3$ führen.
- b) Begründen Sie induktiv, dass zu jeder der $n!$ Permutationen von $1, 2, \dots, n$ genau ein Pfad (im Sinn von a)) führt, und dass alle diese $n!$ Pfade dieselbe Wahrscheinlichkeit haben.
- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen in einer rein zufälligen Permutation von $1, \dots, 100$ die Zahlen $1, 2, 3$ im selben Zyklus?
- d) Finden und beschreiben Sie noch ein weiteres rekursives Verfahren zur Erzeugung einer zufälligen Permutation von $1, \dots, n$, das nicht auf der Zyklendarstellung beruht, und zeichnen Sie auch für dieses (in Form eines Baumes) die 6 Pfade, die, ausgehend von der trivialen Permutation von 1 zu den 6 Permutationen von $1, 2, 3$ führen.

6.S a) (X_1, X_2, X_3) sei eine uniform verteilte Besetzung¹ von 3 Plätzen mit 10 Objekten. Wie wahrscheinlich ist es, dass jeder Platz mit mindestens zwei Objekten besetzt wird? Skizzieren Sie die Menge der zugehörigen Ausgänge als Teilmenge des in der Vorlesung 2a betrachteten de Finetti-Dreiecks.

b) Sei $2g \leq n$. Begründen Sie: Die Anzahl der Besetzungen von g Plätzen mit n Objekten, die auf jeden Platz mindestens zwei Objekte setzen, ist gleich der Anzahl der Besetzungen von g Plätzen mit $n - 2g$ Elementen.

c) T sei eine rein zufällige 2-elementige Teilmenge der Menge $\{1, \dots, 12\}$. Wir setzen $V := T \cup \{0, 13\}$. Wie wahrscheinlich ist es, dass je zwei verschiedene Elemente von V mindestens den Abstand 3 haben?

7. Wie wahrscheinlich ist es, dass eine rein zufällige $\{+1, -1\}$ -Folge der Länge $2n$ in Summe 0 ergibt? Auf welches Ergebnis führt die Stirling-Approximation?

8.S a) Es sei $Z = (Z_1, \dots, Z_{10})$ eine faire Münzwurffolge der Länge 10. Die Abbildung $h : S := \{0, 1\}^{10} \rightarrow [0, 1]$ sei definiert durch

$$h(a_1, \dots, a_{10}) := \sum_{i=1}^{10} a_i 2^{-i}.$$

Es sei $y = (y_1, \dots, y_{10}) \in S$, mit $x := \sum_{i=1}^{10} y_i 2^{-i}$.

i) Wieviele $a \in S$ gibt es mit $h(a) \leq x$?

ii) Berechnen Sie $\mathbf{P}(h(Z) \leq x)$.

b) (i) Die $\{1, 2, 3\}^n$ -wertige Zufallsvariable $W = (W_1, \dots, W_n)$ sei ein (p_1, p_2, p_3) -Würfeln der Länge n . Finden Sie eine Abbildung $h : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1\}$ so, dass $(h(W_1), \dots, h(W_n))$ ein p_1 -Münzwurf der Länge n ist, und begründen Sie Ihr Ergebnis durch induktive Berechnung von $\mathbf{P}(h(W_1) = a_1, \dots, h(W_n) = a_n)$.

(ii) (X_1, X_2, X_3) sei multinomial $(n; p_1, p_2, p_3)$ -verteilt. Wie ist dann $X_2 + X_3$ verteilt?

¹Zur Erinnerung: Bei einer *Besetzung* (als Synonym für ein g -Tupel von Besetzungszahlen) unterscheiden wir nicht, mit welchen Objekten der jeweilige Platz besetzt ist.