Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 25. Januar 2019, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

45. Wir betrachten die gewöhnliche Irrfahrt auf den 8 Eckpunkten des dreidimensionalen Würfels, beschrieben durch den Zustandsraum $S = \{0,1\}^3$. Für $a = (a_1, a_2, a_3) \in S$ sei $w(a)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Irrfahrt mit Start in a den Zustand $(0,0,0)$ vor dem Zustand $(1,1,1)$ trifft
a) Begründen Sie, warum $w(a)$ nur von $a_1 + a_2 + a_3$ abhängt.[1]
b) Berechnen Sie $w((0,0,1))$.

46.S a) Zwei Dartprofis A und B werfen so lange abwechseln auf ein Ziel, bis einer trifft. Pro Wurf trifft A mit Wahrscheinlichkeit α, B mit Wahrscheinlichkeit β. Wie sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten, falls A den ersten Wurf hat? Für welche Wahl von α und β stehen dann die Chancen gleich?

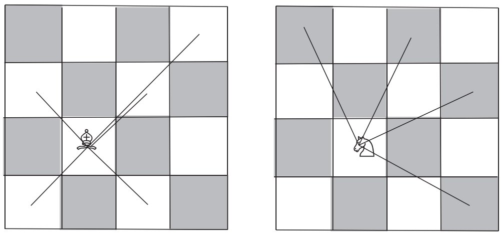
b) Wir betrachten eine Folge $(X_i)_{i\geq 1}$ von zufälligen Buchstaben. Die X_i seien unabhängig und jeweils gleich A, B oder C mit Wahrscheinlichkeit $1/3$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wartet man auf das Muster ABC länger als auf das Muster BB?

Finden Sie in a) und b) jeweils erst einen passend reduzierten Zustandsraum samt graphischer Darstellung.

47.S a) (i) Zwei Spieler mit Vermögen k und ℓ Euro spielen Partien mit gleichen Chancen. In jeder Runde zahlt der Verlierer dem Gewinner einen Euro. Das Spiel endet, wenn ein Spieler bankrott ist.
Zeigen Sie: Die erwartete Spieldauer ist $k \cdot \ell$. (Stellen Sie ein Gleichungssystem auf.)
(ii) Wieviele Schritte dauert es in Erwartung, bis ein gewöhnlicher Irrfahrer auf $\mathbb{Z}$ erstmal die Entfernung 1000 von seinem Startpunkt erreicht?

b) Bei einem gewöhnlichen Würfel seien drei Seiten rot, zwei Seiten grün und eine Seite schwarz eingefärbt. Wie groß ist die erwartete Anzahl von Würfen, bis alle drei Farben mindestens einmal gefallen sind?

48. Wir betrachten ein Schachbrett S bestehend aus 16 Feldern. Die Figuren erinnern daran, welche Felder ein *Läufer* (links) und ein *Springer* (rechts) in einem Schritt erreichen kann. Wie gehabt sprechen wir von einer *einfachen Irrfahrt*, wenn jedes in einem Schritt erreichbare Feld mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt wird.
Bestimmen Sie
(i) die Gleichgewichtsverteilung der einfachen Springer-Irrfahrt,
(ii) mindestens zwei verschiedene Gleichgewichtsverteilungen der einfachen Läufer-Irrfahrt.



[1] $a_1 + a_2 + a_3$ nennt man auch den *Hammingabstand* des Zustands a von $(0,0,0)$.